

I. megoldás: Az ismert

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

képlet felhasználásával

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \frac{b}{c}}{1 + \frac{b}{c}} = \frac{c - b}{c + b} = \frac{c - b}{14},$$

amiből

$$(1) \quad c - b = \frac{14}{4} = \frac{7}{2},$$

a feladat szerint

$$(2) \quad c + b = 14.$$

(1) és (2)-ből

$$c = \frac{35}{4} = 8,75 \text{ cm} \quad \text{és} \quad b = \frac{21}{4} = 5,25 \text{ cm},$$

és így

$$a = \sqrt{\frac{35^2 - 21^2}{16}} = \sqrt{\frac{56 \cdot 14}{16}} = \sqrt{\frac{16 \cdot 49}{16}} = 7 \text{ cm}.$$

Gerencsér Piroska (Bp., VIII., Zrínyi Ilona lg. IV. o. t.)

II. megoldás: Felhasználhatjuk a

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

képletet is.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Tehát egy alkalmas λ arányossági tényezővel a háromszög oldalai ilyen alakúak:

$$a = 4\lambda, \quad b = 3\lambda, \quad \text{és} \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16\lambda^2 + 9\lambda^2} = 5\lambda.$$

A feladat szerint

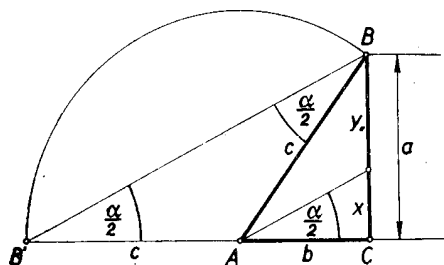
$$b + c = 8\lambda = 14,$$

amiből

$$\lambda = \frac{7}{4}.$$

Kovács István (Bp., VIII., Piarista g. IV. o. t.)

III. megoldás: Trigonometriai képletek nélkül is célhoz érhetünk. Az α szög felezője az a oldalt x és y részekre osztja. (Lásd ábrát.)



Ismeretes tétel alapján

$$(1) \quad \frac{x}{y} = \frac{b}{c}.$$

Mivel a feladat szerint $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} = \frac{x}{b}$, azért $x = \frac{b}{2}$, és így (1) alapján

$$y = \frac{c}{2}.$$

Tehát

$$a = x + y = \frac{b + c}{2} = \frac{14}{2} = 7.$$

Pythagoras tétele szerint

$$7^2 + b^2 = (14 - b)^2 = 196 - 28b + b^2,$$

ahonnan

$$28b = 147, \quad \text{és így} \quad b = \frac{147}{28} = \frac{21}{4} \text{ stb.}$$

Benkő Bálint (Sárospatak, Rákóczi g. III. o. t.)

IV. megoldás: Még a szögfelező-tételt is nélkülözhetjük. Forgassuk $AB = c$ átfogót A körül az $AC = b$ oldal meghosszabbításába: $AB' = c$. (Lásd ábrát.) Akkor nyilván

$$B'C = b + c = 14,$$

és a

$$\angle BB'C = \frac{\alpha}{2}.$$

Tehát a $BB'C$ derékszögű háromszögből

$$a = (b + c) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 14 \cdot \frac{1}{2} = 7$$

stb., mint a III. megoldásban.

Rázga Tamás (Bp. II., Rákóczi g. III. o. t.)