

I. megoldás: Az $\alpha \leq 90^\circ$ feltételnek természetesen csak úgy van értelme, ha $\alpha > 0$ és $\beta > 0$.

A feltételi egyenletünk így is írható:

$$(1) \quad \sin \beta = \frac{3}{4} \sin \alpha = \frac{3}{4} 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Mivel $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$, azért $0^\circ < \frac{\alpha}{2} \leq 45^\circ$. Ez utóbbi intervallumban $\cos \frac{\alpha}{2}$ legkisebb értéke $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ha tehát (1)-ben a $\cos \frac{\alpha}{2}$ helyett a nálánál sohasem nagyobb $\frac{\sqrt{2}}{2}$ -t írjuk, akkor a jobboldalt csökkentettük, vagyis

$$(2) \quad \sin \beta \geq \frac{3\sqrt{2}}{4} \sin \frac{\alpha}{2} > \sin \frac{\alpha}{2},$$

mert $\frac{3\sqrt{2}}{4} = \sqrt{\frac{9}{8}} > 1$.

Mivel 0° és 90° között a sinus-érték növekedésével együtt jár a szög növekedése is, azért (2) alapján $\sin \beta > \sin \frac{\alpha}{2}$ egyenlőtlenségből következik, hogy $\beta > \frac{\alpha}{2}$.

Megjegyzés: A (2) alatti egyenlőtlenség első részéből következik, hogy a $\beta > \frac{\alpha}{2}$ állítás, még az eredeti feltételnél kevesebbet kívánó $\sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha$ feltétel mellett is fennáll, és csak az $\alpha = 90^\circ$ határon megy át egyenlőségbe.

Bártfai Pál (Bp. I., Petőfi g. IV. o. t.)

II. megoldás: A $\beta > \frac{\alpha}{2}$ (az első negyedben) állítás helyett vizsgáljuk meg a

$$\sin \beta = \frac{3}{4} \sin \alpha > \sin \frac{\alpha}{2}$$

állítást.

Keressük meg az

$$y_1 = \sin \beta = \frac{3}{4} \sin \alpha \quad \text{és} \quad y_2 = \sin \frac{\alpha}{2}$$

görbék közös pontjait, vagyis oldjuk meg az alábbi goniometria i egyenletet:

$$\frac{3}{4} \sin \alpha = \sin \frac{\alpha}{2}.$$

$\sin \frac{\alpha}{2}$ helyébe $\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$ -t írva és négyzetre emelve

$$\frac{9}{16} \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos \alpha}{2},$$

vagyis

$$9(1 - \cos^2 \alpha) = 8 - 8 \cos \alpha,$$

rendezve

$$9 \cos^2 \alpha - 8 \cos \alpha - 1 = 0,$$

amiből

$$\cos \alpha_1 = 1 \quad \text{és} \quad \cos \alpha_2 = -\frac{1}{9},$$

és így

$$\alpha_1 = 0 \quad \text{és} \quad \alpha_2 > \frac{\pi}{2}.$$

Tehát a $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ intervallumban nincs gyök, és mivel az $\alpha = \frac{\pi}{2}$ helyen

$$y_1 = \frac{3}{4} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4} > \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = y_2,$$

azért az egész $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ intervallumban a $\sin \beta = \frac{3}{4} \sin \alpha$ görbe a $\sin \frac{\alpha}{2}$ görbe felett marad, amiből következik, hogy ebben az intervallumban

$$\beta > \frac{\alpha}{2}.$$

Cser László (Esztergom, I. István g. IV. o. t.)