

I. megoldás: Mivel a lg-függvény 0-ra és negatív értékekre nincs értelmezve, kell hogy $x > 0$ és $y > 0$ legyen. Másrészt, ha $0 < x \leq 1$, akkor $\lg x \leq 0$, és $\lg \lg x$ nincs értelmezve. Tehát ezeket az értékeket is ki kell zárunk és feltenni, hogy $x > 1$ és (hasonló okból) $y > 1$.

Az (1) egyenletet kétszeri logaritmálással átalakítjuk. (Ez megengedett, mert kikötéseink szerint a logaritmálandó mennyiségek mind pozitívak.)

$$(1') \quad (\lg y)^{\lg \lg x} \cdot \lg x = y^2;$$

$$(1'') \quad (\lg \lg x)(\lg \lg y) + \lg \lg x = 2 \lg y$$

Feltételünk szerint $y \neq 0$ és $y \neq 1$ ezért a (2) egyenletben a baloldalon és a jobboldalon y kitevője egyenlő.

$$(2') \quad (\lg x)^{\lg \lg y} = y.$$

Vegyük ez utóbbi egyenletben is mindkét oldalnak lg-át.

$$(2'') \quad (\lg \lg y)(\lg \lg x) = \lg y,$$

amit $(1'')$ -ből levonva

$$(3) \quad \lg \lg x = \lg y.$$

Ezt visszahelyettesítve $(2'')$ -be és $\lg y$ -nal ($\lg y \neq 0$) osztva

$$\lg \lg y = 1, \quad \text{amiből} \quad \lg y = 10, \quad \text{és így} \quad y = 10^{10}.$$

(3)-ból viszont $\lg x = y$, tehát

$$x = 10^y = 10^{10^{10}}.$$

Ez egyenletrendszerünk egyetlen megoldása.

Szabados József (Bp. III. Árpád g. III. o. t.)

II. megoldás: A baloldal kitevői egyenlők, amit tüstént látunk, ha összehasonlítjuk a kitevő lg-át. Ezt tudva, vegyük mindkét egyenlet lg-át, és az így nyert két egyenletet osszuk el egymással:

$$(1^*) \quad (\lg y)^{\lg \lg x} \cdot \lg x = y^2,$$

$$(2^*) \quad (\lg x)^{\lg \lg y} \cdot \lg y = y \lg y.$$

$$\frac{\lg x}{\lg y} = \frac{y^2}{y \lg y}, \quad \text{vagyis} \quad \lg x = y,$$

és ezzel az I. megoldás (3) egyenletére jutottunk, majd (2^*) -ban $\lg x$ helyébe y -t helyettesítve, y ugyanúgy kiszámítható, mint az I. megoldásban.

Farkas László (Ózd, József A. g. III. o. t.)