

I. megoldás: Az állítást elegendő a félátmérőkre bizonyítani, mert ha ezekre igaz, nyilván igaz kétszeresükre is.

Abban a speciális esetben, amikor a két, egymásra merőleges átmérő éppen a nagy- és a kistengely, a reciprokok értékek négyzetösszege:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{b^2 + a^2}{a^2 b^2}.$$

Így tehát, ha a tétel igaz, az állandó szükségképpen

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}$$

Vegyük fel a koordináta-rendszer kezdőpontját a nagy- és kistengely metszéspontjában, az ellipszis tengelyei pedig illeszkedjenek a koordináta-rendszer tengelyeihez. Ez esetben, mint ismeretes, az a , b féltengelyű ellipszis egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Legyen az egyik félátmérő egyenesének egyenlete $y = mx$, akkor a reá merőleges másik félátmérő egyenesének egyenlete $y = -\frac{1}{m}x$. Behelyettesítéssel kiszámítva az ellipszis és a két átmérő egyenes egy-egy metszéspontjának (az átmérő egy-egy végpontjának) koordinátáit:

$$\begin{aligned} x_1^2 &= \frac{a^2 b^2}{b^2 + a^2 m^2}, & y_1^2 &= \frac{a^2 b^2 m^2}{b^2 + a^2 m^2}, \\ x_2^2 &= \frac{a^2 b^2 m^2}{a^2 + b^2 m^2}, & y_2^2 &= \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2 m^2}, \end{aligned}$$

akkor a két félátmérő hosszának négyzete

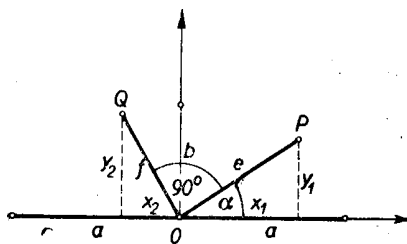
$$\begin{aligned} e^2 &= x_1^2 + y_1^2 = \frac{a^2 b^2 (m^2 + 1)}{a^2 m^2 + b^2}, \\ f^2 &= x_2^2 + y_2^2 = \frac{a^2 b^2 (m^2 + 1)}{a^2 + b^2 m^2}. \end{aligned}$$

Ebből pedig a reciprokok négyzetösszege :

$$\frac{1}{e^2} + \frac{1}{f^2} = \frac{(a^2 + b^2) + (a^2 + b^2)m^2}{a^2 b^2 (m^2 + 1)} = \frac{(a^2 + b^2)(1 + m^2)}{a^2 b^2 (m^2 + 1)} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}$$

ami valóban független az m -től, vagyis minden egymásra merőleges átmérőpárra ugyanaz.

Gerencsér Piroska (Bp. VIII., Zrínyi Ilona lg. IV. o. t.)



II. megoldás: A betűzést az ábra mutatja. Fejezzük ki a félátmérők végpontjainak koordinátáit a félátmérők hosszával és a félátmérőknek az x tengellyel bezárt szögével.

A P pont koordinátái:

$$x_1 = e \cos \alpha, \quad y_1 = e \sin \alpha,$$

a Q pont koordinátái:

$$\begin{aligned} x_2 &= f \cos(\alpha + 90^\circ) = f \sin \alpha, \\ y_2 &= f \sin(\alpha + 90^\circ) = f \cos \alpha. \end{aligned}$$

Mivel P és Q az ellipszis pontjai, ezért e koordináták kielégítik annak egyenletét:

$$\frac{e^2 \cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{e^2 \sin^2 \alpha}{b^2} = 1, \quad \text{és} \quad \frac{f^2 \sin^2 \alpha}{a^2} + \frac{f^2 \cos^2 \alpha}{b^2} = 1.$$

Ebből

$$\frac{1}{e^2} = \frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b^2}, \quad \text{és} \quad \frac{1}{f^2} = \frac{\sin^2 \alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{b^2}.$$

E két egyenlet összege

$$\frac{1}{e^2} + \frac{1}{f^2} = \frac{1}{a^2}(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + \frac{1}{b^2}(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

ami valóban állandó.

Daróczy Zoltán (Debrecen, Ref. g. III. o. t.)