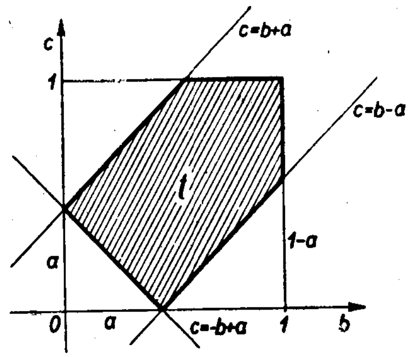
I. megoldás: Legyen a kiválasztandó három szakasz a, b, $c < 1$. Minden lehetséges kiválasztás egy számhármassal jellemezhető. A »kedvező« és »lehetséges« esetek összehasonlítása céljából ezeket alkalmas módon ábrázolni fogjuk.

A számhármasokat közvetlenül ábrázolhatjuk térbeli koordinátarendszerben a tér egy-egy pontjával (lásd a II. megoldást). A síkbeli koordinátarendszer közvetlenül csak számpárok ábrázolására alkalmas. Ezért egyelőre az egyik oldalt, pl. a-t állandónak tekintjük, és megvizsgáljuk, mi a valószínűsége annak, hogy rögzített a mellett, változó b és c-vel háromszöget lehessen szerkeszteni. A rögzített a-hoz tartozó (b, c) számpárt a szokásos módon derékszögű koordinátarendszerben ábrázolhatjuk oly ponttal, melynek abszcisszája b, ordinátája c (1. ábra).



1. ábra

A háromszög megszerkeszthetőségének feltételei

$$c < b + a; \tag{1}$$

$$c > -b + a; \tag{2}$$

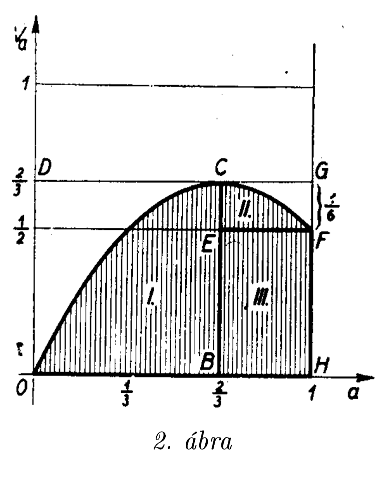
$$c > b - a. \tag{3}$$

Az (1) feltételnek adott a mellett a $c = b + a$ egyenes (az egyenes irányhatározója 1, az ordináta-tengelyből lemetszett szakasz: a) *alatt* fekvő pontok tesznek eleget. A (2) feltételnek a $c = -b + a$ egyenes *fölött* fekvő, a (3) feltételnek a $c = b - a$ egyenes *fölött* fekvő pontok tesznek eleget. Mindhárom feltételt kielégítő és az egységnégyzet belsejébe eső pontok összessége alkotja a kedvező eseteket, rögzített a esetén. (Az 1. ábrán a srafozott t terület). Az összes lehetséges esetet pedig az egységnégyzet területével ($T = 1$) jellemezhetjük. Eszerint, rögzített a mellett, az szerkeszthetőség valószínűsége

$$V_a = \frac{t}{T} = \frac{1 - \dfrac{a^2}{2} - 2\dfrac{(1-a)^2}{2}}{1^2} = -\frac{3}{2}a^2 + 2a \tag{4}$$

Ez a valószínűség csak a megválasztásától függ (l. alábbi »Megjegyzés«-t).

Tekintsük ezután a-t változónak és ábrázoljuk V_a-t, mint a függvényét. Ezen az ábrán valamely rögzített abszcisszához tartozó kedvező eseteket a V_a ordináta, ugyanezen abszcisszához tartózó lehetséges eseteket egységnyi ordináta szakasz ábrázolja, így az a változtatásával létrejövő összes kedvező esetek a görbe alatti t területtel, míg az összes lehetséges esetet az egységnégyzet területével ($T = 1$) jellemezhetjük.



2. ábra

(4)-ből leolvashatjuk, hogy a görbe képe parabola, melynek – mint ismeretes – maximuma van az $a = (-2) : (-3) = \frac{2}{3}$ helyen, ahol V_a maximális értéke $\frac{2}{3}$ (2. ábra). A görbe alatti terület I része az $OBCD$ négyzet $\frac{2}{3}$ része (lásd IV.

oszt. tankönyv 115. old.), vagyis $\mathrm{I}=\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$. Hasonlóképpen bizonyítható (és az affinitás alapján is következik), hogy a II terület az $EFGC$ téglalap $\frac{2}{3}$ része, vagyis $\mathrm{II}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{27}$; a III pedig azonos a $BHFE$ téglalappal, melynek területe $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$. A kedvező terület tehát

$$t=\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}=\frac{8}{27}+\frac{1}{27}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2},$$

és így a keresett valószínűség

$$V=\frac{t}{T}=\frac{1}{2}$$

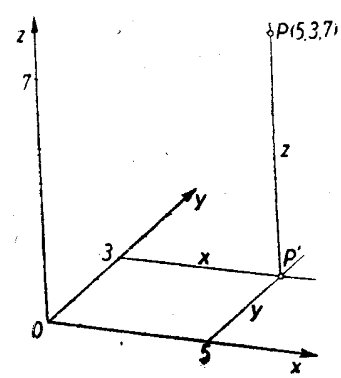
Vigassy József (Bp. I., Petőfi g. IV. o. t.)

Megjegyzés: Itt nemcsak a feladat kérdésére kaptunk feleletet, hanem arra is, hogy ha az első szakaszt találomra választjuk ki és annak hosszúsága a, akkor a szerkeszthetőségnek viszonylagos valószínűsége

$$V_a=-\frac{3}{2}a^2+2a.$$

A 2. ábrán leolvasható, hogy ha $a<\frac{1}{3}$, akkor $V_a<\frac{1}{2}$ és az a-val együtt 0 felé közeledik; ha $a=\frac{1}{3}$, vagy $a=1$, akkor $V_a=\frac{1}{2}$ vagyis, ugyanakkora, mint az abszolút valószínűség; ha pedig $\frac{1}{3}<a<1$, akkor $\frac{1}{2}<V_a\leq\frac{2}{3}$, és V_a maximuma $\frac{2}{3}$, amikor $a=\frac{2}{3}$. Tehát az első szakaszt tekintve, a »legkedvezőbb« kiválasztás az $a=\frac{2}{3}$ hosszúságú.

II. megoldás: Ismeretes, hogy a sík pontjait koordinátarendszerben számpárokkal (a pont koordinátáival) lehet megadni. Hasonló módon a tér pontjai térbeli koordinátarendszerben számhármasokkal adhatók meg. A síkbeli xy koordinátarendszerhez hozzáfűzzük az O pontban az xy síkra merőleges z tengelyt és a térbeli P pont x és y koordinátáján értjük az xy síkon fekvő merőleges vetületének, P'-nek a koordinátáit, míg a harmadik koordináta, a z koordináta a pont távolsága az xy síktól, $z=P'P$. Pl. a 3. ábrán szemléltetett pont: $P(5,3,7)$.

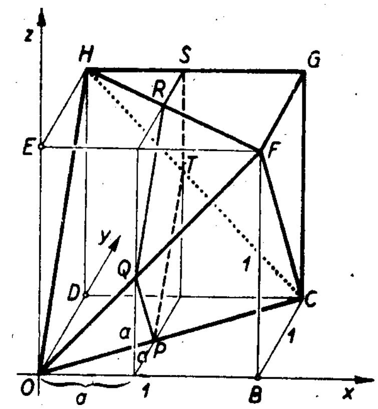


3. ábra

Mármost tekintsünk az egységnél kisebb, egyébként tetszőlegesen felvett három szakaszt egy térbeli pont három koordinátájának. $a=x$, $b=y$, $c=z$. A tér mindazon pontjai, amelyekre nézve $x<1$, $y<1$, $z<1$ az úgynevezett egységkocka belsejében vannak. (E kocka egyik csúcsa a kezdőpont, minden éle egységnyi és egy-egy éle az x, y, z tengelyre esik.) Vizsgáljuk meg, hol helyezkednek el azok a pontok, amelyek koordinátáiból háromszög szerkeszthető. Ezekre teljesülnie kell az I megoldás (1), (2), (3) feltételének, vagyis a koordináták szokásos jelölésével írva

(4) $$z<x+y;$$
(5) $$z>x-y;$$
(6) $$z>-x+y.$$
(7)

Egyelőre (1) helyett vizsgáljuk meg a $z=x+y$ egyenlőség értelmét. (Elegendő az egységkockára szorítkoznunk. 4. ábra.)



4. ábra

Az xz sík pontjai közül az egyenlőségnek az origóból kiinduló OF lapátló pontjai tesznek eleget, az yz sík pontjai közül pedig a OH lapátló pontjai (mert pl. minden OF-en fekvő pontra nézve $z = x$ és $y = 0$). A kocka $EFGH$ lapjának pontjai közül egyenlőségünknek a z-t nem metsző FH átló pontjai tesznek eleget ($x + y = 1$ és $z = 1$). Belátható továbbá, hogy a három lapátló által meghatározott OFH háromszög minden pontjának koordinátái kielégítik egyenletünket. Pl. vizsgáljuk meg az FH-val párhuzamos szakaszokat. A szakasz két végpontja feltételünknek eleget tesz. Másrészt a szakasz minden pontjára z azonos érték és $x + y$ is azonos.[1]

Most már értelmet adhatunk az (1) egyenlőtlenségnek. Ennek *nem* tesznek eleget az egységkocka azon pontjai, amelyek az AFH háromszög *fölött* helyezkednek el, tehát az egységkockából levágott $EOFH$ háromoldalú gúla pontjai, mert e pontokra nézve $z > x + y$. Hasonlóan láthatjuk be, hogy a (2) és (3) feltételt ki *nem* elégítő pontok szintén egy-egy (az előzővel egybevágó) három oldalú gúlát alkotnak, mégpedig a $BOCF$, illetőleg $DOCH$ gúlákat. Ha az egységkockát mindhárom gúlával megcsonkítjuk, a megmaradt rész pontjai mind a három feltételnek eleget tesznek, tehát e csonkított test pontjai képviselik a kedvező eseteket. Miután pedig mindegyik gúla köbtartalma $\frac{1 \cdot 1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, a három gúláé összesen: $3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$, és így a keresett valószínűség

$$V = \frac{\text{csonkított test köbtartalma}}{\text{egységkocka köbtartalma}} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}.$$

Kovács László (Debrecen, Ref. g. IV. o. t.)

Megjegyzés: Ennél a megoldásnál nem kaptuk meg közvetlenül a V_a feltételes valószínűséget, de meghatározhatjuk, ha az $x = a$ sik (az yz síkkal párhuzamos, az x tengelyt az origótól $x = a$ távolságban metsző sík) által a megcsonkított testből kimetszett $FQRST$ ötszög (4. ábra) területét (megfelel az 1. ábrában srafozott t területnek) törjük az egységkockából kimetszett egységnégyzet területével. Ezzel nemcsak az I. és II. megoldás közötti összefüggést világítottuk meg, hanem a köbtartalomnak integrállal való kiszámítását is előkészítettük.

[1]Megjegyezzük, hogy egy 3 ismeretlenes elsőfokú egyenlet mindig síknak az egyenlete. Mi ezúttal a síknak az egységkocka belsejébe eső részére szorítkozunk, vagyis arra a háromszögre, melyet a sík az egységkockából kimetsz.