

1. megoldás: Felírjuk egy tetszőleges $P(u, v)$ pontból a parabolához húzható érintők egyenletét, majd annak feltételét, hogy a két érintő 45° -os szöget zárjon be egymással. Így a feltételt kielégítő pontok koordinátái között összefüggést nyerünk, ez a keresett mértani hely egyenlete.

A $P(u, v)$ ponton átmenő egyenes, melynek egyenlete

$$(1) \quad y - v = m(x - u)$$

alakú, ez esetben érinti az

$$(2) \quad y^2 = 2px$$

parabolát, ha a parabolával alkotott két metszéspontja egybeesik. Fejezzük ki (1)-ből x -et, és a nyert értéket írjuk be (2)-be, akkor rendezés után a következő egyenlethez jutunk:

$$my^2 - 2py + (2pv - 2mpu) = 0.$$

y -ra nézve egybeeső gyököket akkor kapunk, ha az egyenlet diszkriminánsa

$$4p^2 - 8mpv + 8m^2pu = 0,$$

azaz egyszerűsítve és rendezve

$$2um^2 - 2vm + p = 0.$$

Ezt az egyenletet m -re megoldva nyerjük a $P(u, v)$ pontból a parabolához húzható két érintő irányítányezőjét.

$$(3) \quad m_1 = \frac{v + \sqrt{v^2 - 2pu}}{2u} \quad \text{és} \quad m_2 = \frac{v - \sqrt{v^2 - 2pu}}{2u}$$

Annak feltétele, hogy a két érintő 45° -os szöget zárjon be egymással

$$(4) \quad \operatorname{tg} 45^\circ = 1 = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}, \quad \text{ebből} \quad 1 + m_1 m_2 = m_1 - m_2$$

Ez utóbbi egyenletbe behelyettesítve m_1 és m_2 -nek a (3) egyenletekből nyert értékét, megkapjuk a keresett mértani hely egyenletét:

$$1 + \frac{v + \sqrt{v^2 - 2pu}}{2u} \cdot \frac{v - \sqrt{v^2 - 2pu}}{2u} = \frac{v + \sqrt{v^2 - 2pu}}{2u} - \frac{v - \sqrt{v^2 - 2pu}}{2u},$$

azaz összevonva

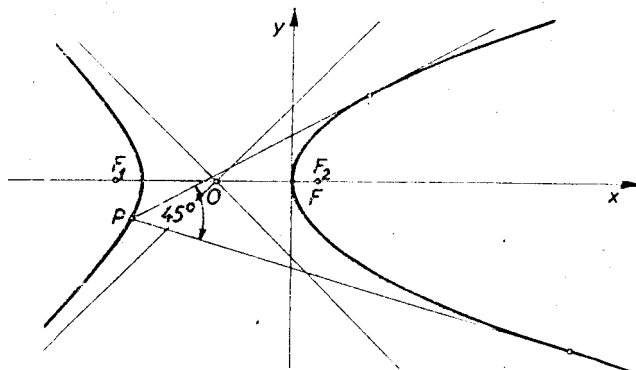
$$1 + \frac{p}{2u} = \frac{\sqrt{v^2 - 2pu}}{u}.$$

Az egyenletet át fogjuk alakítani, hogy megállapíthassuk, milyen másodrendű görbe egyenlete és melyek e görbe jellemző adatai. Végigsorozzuk u -val, négyzetre emelünk, majd az u -t tartalmazó tagokat kiegészítjük teljes négyzetté

$$\left(u + \frac{3}{2}p\right)^2 - v^2 = 2p^2, \quad \text{azaz} \quad \frac{\left(u + \frac{3}{2}p\right)^2}{2p^2} - \frac{v^2}{2p^2} = 1.$$

Ez egyenlő oldalú hiperbola egyenlete. A hiperbola főtengelye egybeesik a parabola tengelyével, középpontja az $O\left(-\frac{3p}{2}, 0\right)$ és féltengelyeinek hossza

$a = b = p\sqrt{2}$. A lineáris excentricitás $c = \sqrt{a^2 - b^2} = a\sqrt{2} = 2p$, vagyis a hiperbola egyik fókusza $F_2\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ egybeesik a parabola F fókuszával (l. ábrát).



A keresett mértani hely nem az egész hiperbola, hanem annak csak a parabolától távolabb eső ága. A másik ág pontjaiból a parabola 135° -os szög alatt látszik. Ugyanis az átalakításnál négyzetre emeltünk és ezáltal egybeolvasztottuk az

$$1 = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \quad \text{egyenletet a} \quad -1 = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

egyenlettel. Az utóbbi egyenlet viszont azt fejezi ki, hogy a két érintő egymással 135° -os szöget zár be.

Tarlaczk László (Szombathely, Nagy Lajos g. III. o. t.)

II. megoldás: Legyen a $P(x, y)$ a keresett mértani hely egy pontja, akkor e pontból a parabolához húzható érintők 45° -os szöget zárnak be. Valamely $P(x_1, y_1)$ pontban a parabola érintőjének egyenlete

$$y_1 y - p(x_1 + x) = 0.$$

Mivel az érintési pont a parabolán fekszik, azért $y_1^2 - 2px_1 = 0$, és így az érintő egyenlete így is írható

$$y_1^2 - 2yy_1 + 2px = 0,$$

amely egyenletet y_1 -re megoldva

$$y_1 = \pm \sqrt{y^2 - 2px}.$$

Tehát a $P(x, y)$ pontból a parabolához húzható érintők érintési pontjainak ordinátái

$$y_1 = y + \sqrt{y^2 - 2px}, \quad y_2 = y - \sqrt{y^2 - 2px}.$$

Az érintők iránytangensei

$$m_1 = \frac{p}{y_1}, \quad \text{illetve} \quad m_2 = \frac{p}{y_2},$$

tehát a két egyenes szögének tangensét kifejező képlet alapján nyerjük

$$1 = \frac{py_1 - py_2}{y_1 y_2 + p^2} = \frac{2\sqrt{y^2 - 2px}}{2x + p}.$$

Innen a keresett mértani hely egyenlete

$$4x^2 - 4y^2 + 12px + p^2 = 0$$

Ez azonban így is írható:

$$\left(x + \frac{3p}{2}\right)^2 - y^2 - 2p^2 = 0,$$

ami egyezik az első megoldásban nyert eredménnyel.

Bárfai Pál (Bp. I. Petőfi g. III. o. t.)