

Az egyenlet mindkét oldalát tagokra bontva és e tagokat megfelelően egymás alá írva, nyerjük

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + x^2 + 2x \cdot 1 + 1^2 + \\ + x^2 + 2x \cdot 2 + 2^2 + \\ + \dots\dots\dots \\ \cdot \\ \cdot \\ + x^2 + 2x \cdot n + n^2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 2x \cdot n + 2x \cdot 1 + n^2 + 2n \cdot 1 + 1^2 + \\ + x^2 + 2x \cdot n + 2x \cdot 2 + n^2 + 2n \cdot 2 + 2^2 + \\ + \dots\dots\dots \\ \cdot \\ \cdot \\ + x^2 + 2x \cdot n + 2x \cdot n + n^2 + 2n \cdot n + n^2. \end{array} \right.$$

A baloldalon álló 3 oszlop rendre azonos a jobboldal első, harmadik és utolsó oszlopával. Tehát egyenletünk

$$x^2 = n \cdot 2xn + n \cdot n^2 + 2n(1 + 2 + \dots + n) = 2n^2x + n^3 + n^2(n + 1),$$

vagyis

$$x^2 - 2n^2x - n^2(2n + 1) = 0,$$

amiből

$$x_{1,2} = \frac{2n^2 \pm \sqrt{4n^4 + 4n^2(2n + 1)}}{2} = n^2 \pm n\sqrt{n^2 + 2n + 1} = n^2 \pm n(n + 1),$$

tehát

$$x_1 = 2n^2 + n = n(2n + 1), \quad x_2 = -n, \quad \text{ahol } n = 1, 2, \dots$$

Csapody Miklós (Bp. VIII., Piarista g. I. o.t.)

Megjegyzés: Ezen egyenletsorozat megoldásával tulajdonképpen a következő kérdésre feleltünk: »Melyek azok az egymás után következő egész számok, amelyeknek négyzetösszege egyenlő a folytatólagosan utána következő, eggyel kevesebb számból álló számok négyzetösszegével? « Az $x_2 = -n$ megoldás csak azt a trivialitást fejezi ki, hogy bármely negatív $-n$ egész számtól kezdve a számsoron 0-ig bezárólag található egész számok négyzetösszege egyenlő a 0 után következő n egész szám négyzetösszegével. Azonban az $x_1 = n(2n + 1)$ gyök már érdekesebb és tartalmasabb, mert azt mondja ki, hogy minden $n(2n + 1)$ alakú pozitív egész számmal kezdődő $n + 1$ számú szomszédos egész szám négyzetösszege egyenlő a folytatólagosan utána következő n egész szám négyzetösszegével. Pl. $n = 1$ esetén $3^2 + 4^2 = 5^2$, $n = 2$ esetén $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$, $n = 3$ esetén $21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$ stb.