I. megoldás: Legyen a keresett szám $10x+y$, akkor $(10x+y)^2=100x^2+10(2xy)+y^2$.
A feladat szerint, feltéve, hogy $2xy$ és y^2 egyjegyű szám,

$$100x^2+10y^2+2xy=\big[10x+(y+1)\big]^2.$$

Rendezés után nyerjük y-ra a következő másodfokú egyenletet

$$9y^2-(18x+2)y-(20x+1)=0,$$

ahonnan

$$\begin{gathered}
y=\frac{2(9x+1)\pm\sqrt{4(9x+1)^2+36(20x+1)}}{18}=\\
=\frac{9x+1\pm\sqrt{81x^2+18x+1+180x+9}}{9}=\frac{9x+1\pm\sqrt{81x^2+198x+10}}{9}=\\
=\frac{9x+1\pm\sqrt{(9x+11)^2-111}}{9}.
\end{gathered}$$

Hogy y egész szám lehessen, annak egy szükséges (ha nem is elégséges) feltétele, hogy a gyök alatti mennyiség teljes négyzet legyen, vagyis

$$(9x+11)^2-111=z^2,$$

azaz

$$(9x+11)^2-z^2=(9x+11+z)(9x+11-z)=111=3\cdot 37,$$

Mivel a $9x+11+z=111$ és $9x+11-z=1$ feltevés $z=5$, $z=55$-ön keresztül $y=1$-re vezet, azért

$$9x+11+z=37,\quad 9x+11-z=3.$$

E két egyenlet összegéből

$$18x+22=40,\quad \text{amiből}\quad x=1,$$

és így

$$y=\frac{9+1\pm\sqrt{20^2-111}}{9}=\frac{10\pm17}{9},$$

de csak az $y=\dfrac{10+17}{9}=3$ érték felel meg.

A keresett szám tehát 13. Tényleg $13^2=169$, $196=14^2$.

Negatív számokat is tekintetbe véve,-14 is megfelel.

Szász Lajos (Balassagyarmat, Balassa g. IV. o. t.)

Megjegyzés: Ez a megoldás csak annyit mutat, hogy olyan megoldás, amelyben $2xy$ és y^2 egyjegyű, nincs más, a találtakon kívül. Valójában ennél több is igaz. Ha y^2-ben v számú 10-es van, $2xy+v$-ben pedig u számú, akkor $(10x+y)^2$ utolsó két jegye y^2-10v és $2xy+v-10u$, így

$$(10x+y)^2=100(x^2+u)+10\{2xy+v-10u\}+\{y^2-10v\},$$

és itt a $\{\}$-jel közti kifejezések adják az utolsó két számjegyet. A feladat feltételei szerint tehát

$$(10x+y+1)^2=100(x^2+u)+10(y^2-10v)+2xy+v-10u.$$

Innen átrendezéssel

$$\begin{gathered}
9(y^2-10v)=9(2xy+v-10u)+20x+2y+1=\\
=9\big(\{2xy+v-10u\}+2x\big)+2(x+y)+1
\end{gathered}$$

adódik, tehát $2(x+y)+1$ osztható 9-cel. Ez pozitív egyjegyű számokat tételezve fel, csak $x+y=4$ és $x+y=13$-ra teljesül. Ha $x+y=13$, akkor x legalább 4, és így,

$$9\cdot\big(\{2xy+v-10u\}+2x\big)+2(x+y)+1\geqq 9\cdot 8+27=9\cdot 11,$$

tehát y^2-10v nem lehetne egyjegyű, v meghatározásával ellentétben.

Ha $x+y=4$, akkor $2xy$ és y^2 egyjegyű, és így a fenti megoldás adja a keresett számokat.

Ha negatív számokat is megengedünk, és ezeket úgy fogjuk fel, hogy a számjegyei negatívak, akkor az $x+y=-5$, $x+y=-14$ értékek is számba jönnek. Ezek közül az utóbbi szintén kizárható, az előbbi pedig a -14, -13 számpárhoz vezet.

II. megoldás: Legyen a keresett szám x.

Bármely négyzetszám utolsó jegye, rendre az alap utolsó jegye szerint

$$0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 6,\ 5,\ 6,\ 9,\ 4,\ 1. \tag{1}$$

A feladat szerint $(x+1)^2$ utolsó jegye x^2 10-esével egyenlő és fordítva, tehát – (1) felhasználásával – x^2 utolsó két jegye csak a következők lehetnek:

$$10,\ 41,\ 94,\ 69,\ 56,\ 65,\ 96,\ 49,\ 14,\ 01. \tag{2}$$

10-re, 94-re és 14-re végződő számok párosak, de 4-gyel nem oszthatók, a 65 végű szám pedig osztható 5-tel, de 25-tel nem, így ilyen számok nem lehetnek négyzetszámok. Tehát a keresett két szomszédos szám négyzetének végződése csak 69, 96 lehet. Mivel a négyzetszámok előző jegyei megegyeznek, így az $(x+1)^2-x^2=2x+1$ különbségre 27 és -27 adódik, amiből az $x=13$, ill. $x=-14$ lehetséges megoldásokat nyerjük, melyek meg is felelnek.

Megjegyzés: Ennél a megoldásnál nem használtuk fel, hogy x kétjegyű. Ez a kikötés tehát a feladat szövegéből elmaradhat.

Csiszár Imre (Bp. I., Petőfi g. II. o. t.)