

I. megoldás: Ismeretes, hogy az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszisnek az (x_1, y_1) pontjában húzott érintő egyenlete

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1.$$

Példákban $a = 3$, $b = 2$ és így az érintő egyenlete

$$(e) \quad \frac{x_1}{9}x + \frac{y_1}{4}y = 1.$$

Az érintési pont ismeretlen x_1, y_1 koordinátáinak kiszámítására két egyenletet szolgáltat annak felhasználása, hogy egyrészt az adott P pont illeszkedik az érintőhöz, másrészt az érintési pont illeszkedik az ellipszishez. Tehát

$$(1) \quad \frac{3}{5 \cdot 9}x_1 + \frac{14}{5 \cdot 4}y_1 = 1,$$

és

$$(2) \quad 4x_1^2 + 9y_1^2 = 36$$

(1)-ből $y_1 = \frac{30 - 2x_1}{21}$, mely értéket (2)-be behelyettesítve nyerjük

$$(3) \quad 25x_1^2 - 15x_1 - 108 = 0,$$

ahonnan

$$x_1' = \frac{12}{5} \quad \text{és} \quad x_1'' = -\frac{9}{5},$$

és így

$$y_1' = \frac{6}{5} \quad \text{és} \quad y_1'' = \frac{8}{5},$$

A nyert értékpárokat (e)-be helyettesítve

$$8x + 9y = 30,$$

illetőleg

$$x - 2y = -5$$

a keresett két érintő egyenlete.

Grätzer György (Bp. VI., Kölcsey g. IV. o. t.)

II. megoldás: Legyen a keresett érintő egyenlete

$$y = mx + b.$$

Az érintő és az ellipszis közös pontjainak koordinátáit megkapjuk, ha y fenti értékét az ellipszis egyenletébe helyettesítjük:

$$4x^2 + 9(mx + b)^2 = 36,$$

vagyis rendezve

$$(1) \quad (4 + 9m^2)x^2 + 18mbx + (9b^2 - 36) = 0.$$

Érintés esetén a metszéspontok egybeesnek, vagyis az (1) alatti másodfokú egyenlet diszkriminánsa 0. Tehát

$$(18mb)^2 - 4(4 + 9m^2)(9b^2 - 36) = 0,$$

vagyis tagokra bontva és 144-gyel egyszerűsítve

$$(2) \quad 9m^2 - b^2 + 4 = 0.$$

Az $y = mx + b$ érintő áthalad a P ponton, tehát $\frac{14}{5} = m \frac{3}{5} + b$, vagyis

$$(3) \quad 3m + 5b = 14.$$

(2) és (3)-ból

$$9m^2 = (14 - 5b)^2 = b^2 - 4,$$

rendezés és egyszerűsítés után

$$6b^2 - 35b + 50 = 0,$$

amiből

$$b_1 = \frac{10}{3}, \quad b_2 = \frac{5}{2},$$

és így

$$m_1 = -\frac{8}{9}, \quad m_2 = \frac{1}{2},$$

A keresett érintők egyenlete tehát

$$y = -\frac{8}{9}x + \frac{10}{3} \quad \text{és} \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

Plichta Jenő (Mezőkövesd, I. László g. IV. o. t.)