

a) A gyökök racionális voltának feltétele, hogy $b^2 - 4ac$ négyzetszám vagy nulla legyen.

Figyelembe véve, hogy a, b, c között nincsen két egyenlő, megszámláljuk a kedvező eseteket b -t szabadon választva 1-től 9-ig, és megkeresve mindegyik b -hez a megfelelő $a \cdot c$ szorzatokat. (Tekintve, hogy a és c felcserélhető, azért minden $a \cdot c$ párt kétszeresen kell számítani.)

$b = 1$ és $b = 2$ esetén nincs megfelelő $a \cdot c$.

$b = 3$	esetén	$1 \cdot 2$	felel meg	(2 eset),
$b = 4$	«	$1 \cdot 3$	«	(2 eset),
$b = 5$	«	$1 \cdot 4, 1 \cdot 6, 2 \cdot 3$	«	(6 eset),
$b = 6$	«	$1 \cdot 5, 1 \cdot 8, 1 \cdot 9, 2 \cdot 4$	«	(8 eset),
$b = 7$	«	$1 \cdot 6, 2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 6, 3 \cdot 4$	«	(10 eset),
$b = 8$	«	$1 \cdot 7, 2 \cdot 6, 3 \cdot 4, 3 \cdot 5$	«	(8 eset),
$b = 9$	«	$1 \cdot 8, 2 \cdot 4, 2 \cdot 7, 3 \cdot 6, 4 \cdot 5$	«	(10 eset).

A kedvező esetek száma tehát $2 + 2 + 6 + 8 + 10 + 8 + 10 = 46$.

A lehető esetek száma a kilenc elemből alkotott ismétlés nélküli harmadosztályú variációk száma

$$V_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7.$$

Tehát annak valószínűsége, hogy egy kísérlet esetén a gyökök racionálisak

$$v_a = \frac{46}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{23}{252},$$

ennél fogva annak valószínűsége, hogy 10 kísérlet közül egyszer sem racionálisak

$$(1 - v_a)^{10} = \left(\frac{229}{252}\right)^{10}.$$

Annak valószínűsége, hogy 10 kísérlet közül egyszer racionálisak és kilencszer nem

$$\binom{10}{1} v_a (1 - v_a)^9 = 10 \cdot \frac{23}{252} \left(\frac{229}{252}\right)^9.$$

Tehát a keresett valószínűség

$$\begin{aligned} V_a &= 1 - \left(\frac{229}{252}\right)^{10} - \frac{230}{252} \left(\frac{229}{252}\right)^9 = 1 - \left(\frac{229}{252}\right)^9 \left(\frac{229}{252} + \frac{230}{252}\right) = \\ &= 1 - \left(\frac{229}{252}\right)^9 \cdot \frac{459}{252} = 1 - \left(\frac{229}{252}\right)^9 \cdot \frac{51}{28} \approx 0,2308. \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \left(-\frac{b}{a}\right) : \frac{c}{a} = -\frac{b}{c}.$$

Tehát a kedvező értékek a -tól függetlenül:

$c = 1,$	$b = 2, 3, \dots, 9$	(8 eset),
$c = 2,$	$b = 4, 6, 8$	(3 eset),
$c = 3,$	$b = 6, 9$	(2 eset),
$c = 4,$	$b = 8$	(1 eset),

vagyis (a -t figyelmen kívül hagyva) a kedvező esetek száma 14, a lehetséges esetek száma pedig $V_9^2 = 9 \cdot 8 = 72$, és így 1 kísérlet esetén a keresett valószínűség

$$v_b = \frac{14}{72} = \frac{7}{36}.$$

Legfeljebb kétszer következik be egy esemény, ha egyáltalán nem, vagy ha pontosan egyszer, vagy pontosan kétszer következik be.

Jelen esetben a keresett valószínűség tehát

$$\begin{aligned} V_b &= (1 - v_b)^{20} + \binom{20}{1} (1 - v_b)^{19} v_b + \binom{20}{2} (1 - v_b)^{18} v_b^2 = \left(\frac{29}{36}\right)^{20} + \\ &+ 20 \left(\frac{29}{36}\right)^{19} \frac{7}{36} + 190 \left(\frac{29}{36}\right)^{18} \left(\frac{7}{36}\right)^2 = \left(\frac{29}{36}\right)^{18} \left(\frac{29^2}{36^2} + \frac{29}{36} \cdot \frac{140}{36} + \frac{49 \cdot 190}{36^2}\right) = \\ &= \left(\frac{29}{36}\right)^{18} \frac{14211}{36^2} = \frac{29^{18} 14211}{36^{20}} \approx 0,2238. \end{aligned}$$