

I. megoldás: Az, hogy az $y = ax^4 + bx^3 + 1$ görbe az $x = 1$ helyen érinti az abszcissa tengelyt, azt jelenti, hogy az

$$ax^4 + bx^3 + 1 = 0$$

egyenletnek az $x = 1$ legalább kétszeres gyöke, vagyis az egyenlet többtagúja $(x - 1)^2$ -tel maradék nélkül osztható.

Az osztást elvégezve hányadosul $ax^2 + (2a + b)x + (3a + 2b)$ -t kapunk, a maradék pedig

$$(4a + 3b)x - (3a + 3b - 1).$$

Tehát kell, hogy

$$4a + 3b = 0, \quad \text{és} \quad 3a + 2b - 1 = 0,$$

mely egyenletrendszerből $a = 3$, $b = -4$.

Tehát a kirovának eleget tevő függvény

$$y = 3x^4 - 4x^3 + 1.$$

Kovács László (Debrecen, Ref. g. IV. o. t.)

II. megoldás: Az $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, illetve

$$(1) \quad x^4 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} = 0$$

egyenlet gyökei legyenek x_1, x_2, x_3 és x_4 . Az egyenlet gyöktényezői alakja tehát

$$(2) \quad (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = 0$$

(1) és (2) megfelelő együtthatói egyenlők, vagyis

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= -\frac{b}{a}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 &= \frac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 &= -\frac{d}{a}, \\ x_1x_2x_3x_4 &= \frac{e}{a}. \end{aligned}$$

Jelen esetben $c = d = 0$, $e = 1$, $x_1 = x_2 = 1$, és így

$$2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}$$

$$1 + 2(x_3 + x_4) + x_3x_4 = 0$$

$$x_3 + x_4 + 2x_3x_4 = 0$$

$$x_3x_4 = \frac{1}{a}$$

amely egyenletrendszerből $a = 3$, $b = -4$

Quittner Pál (Bp. I., Petőfi g. III. o. t.)

III. megoldás: Az előbbieket alapján az $ax^4 + bx^3 + 1$ negyedfokú polinom felbontható két másodfokú polinom szorzatára, amelyből az egyik $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$, a másiknak pedig az első és harmadik együtthatója a ill. 1, és így $ax^2 + cx + 1$ alakú. Tehát az a , b és c együtthatókat kell úgy meghatározni, hogy fennálljon a következő azonosság:

$$(x^2 - 2x + 1)(ax^2 + cx + 1) = ax^4 + bx^3 + 1.$$

Ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy az egyenlő hatványok együtthatói egyenlők legyenek.

A baloldalt polinommal alakítva

$$ax^4 + (c - 2a)x^3 + (a - 2c + 1)x^2 + (c - 2)x + 1 = ax^4 + bx^3 + 1,$$

tehát

$$c - 2a = b, \quad a - 2c + 1 = 0, \quad c - 2 = 0,$$

ahonnan

$$c = 2, \quad a = 2c - 1 = 3, \quad b = 2 - 6 = -4.$$

Zsombok Zoltán (Bp. IV., Könyves Kálmán g. II. o. t.)

IV. megoldás: A magasabbrendű érintést figyelmen kívül hagyva, a feladat szerint az $y = ax^4 + bx^3 + 1$ függvénynek az $x = 1$ helyen szélső értéke van, mely 0-val egyenlő:

$$a + b + 1 = 0, \quad b = -a - 1.$$

Ekkor az $y = ax^4 + bx^3 = x^3(ax + b) = x^3(ax - a - 1)$ függvénynek is szélsőértéke van az $x = 1$ helyen, és így az ebből $\left(-\frac{a^3}{27}\right)$ állandóval való szorzás által nyert

$$y - \frac{ax}{3} \cdot \frac{ax}{3} \cdot \frac{ax}{3}(1 + a - ax)$$

függvénynek is.

Itt a jobboldal tényezői az $x = 1$ hely közelében pozitívak, ha $a > 0$, és összegük állandó: $(a+1)$, tehát szorzatuknak akkor van szélsőértéke,¹ ha a tényezők egyenlők, azaz, ha

$$\frac{ax}{3} = 1 + a - ax.$$

Mivel a szélső érték az $x = 1$ helyen van,
 $\frac{a}{3} = 1$, vagyis $a = 3$, és így $b = -a - 1 = -4$.

Csiszár Imre (Bp. I., Petőfi g. II. o. t.)

¹Ugyanis a számtani és mértani közép egyenlőtlensége szerint, ha s, t, u, v pozitív $\sqrt[4]{stuv} = \sqrt{\sqrt{st}\sqrt{uv}} \leq \frac{\sqrt{st} + \sqrt{uv}}{2} \leq \frac{\frac{s+t}{2} + \frac{u+v}{2}}{2} = \frac{s+t+u+v}{4}$ és egyenlőség csak $s = t = u = v$ esetében állhat fenn.