

I. megoldás: Nyilvánvaló, hogy a két mozgás egy és ugyanazon függőleges síkban történik. Ha e síkban x tengelynek vesszük a ferdén hajított test vetületét a vízszintes síkon, kezdőpontnak a A pontot, akkor a fizikából ismeretes, hogy a közös elhajítási időponttól számított t másodperc múlva az első test koordinátái

$$x_1 = ct \cos \alpha, \quad y_1 = ct \sin \alpha - \frac{g}{2}t^2,$$

a második test koordinátái pedig

$$x_2 = a \quad y_2 = ct - \frac{g}{2}t^2,$$

és így a két test távolságának négyzete

$$\begin{aligned} d^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (ct \cos \alpha - a)^2 + (ct \sin \alpha - ct)^2 = \\ &= c^2 t^2 \cos^2 \alpha - 2act \cos \alpha + a^2 + c^2 t^2 \sin^2 \alpha - 2c^2 t^2 \sin \alpha + c^2 t^2 = \\ (1) \quad &= 2c^2 t^2 (1 - \sin \alpha) - 2act \cos \alpha + a^2. \end{aligned}$$

Ez t -re nézve másodfokú függvény, melynek – mivel t^2 együtthatója $2c^2(1 - \sin \alpha) > 0$ – minimuma van a

$$t_0 = -\frac{-2ac \cos \alpha}{2 \cdot 2c^2(1 - \sin \alpha)} = \frac{a \cos \alpha}{2c(1 - \sin \alpha)}$$

helyen.

A d^2 minimális értékét megkapjuk, ha a t_0 értéket behelyettesítjük az (1) alatti függvénybe:

$$\begin{aligned} d_{\min}^2 &= \frac{a^2 \cos^2 \alpha}{2(1 - \sin \alpha)} - \frac{a^2 \cos^2 \alpha}{1 - \sin \alpha} + a^2 = a^2 - \frac{a^2 \cos^2 \alpha}{2(1 - \sin \alpha)} = \\ &= a^2 \left(1 - \frac{1 - \sin^2 \alpha}{2(1 - \sin \alpha)} \right) = a^2 \left(1 - \frac{1 + \sin \alpha}{2} \right) = a^2 \frac{1 - \sin \alpha}{2}, \end{aligned}$$

vagyis

$$d_{\min} = a \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{2}}.$$

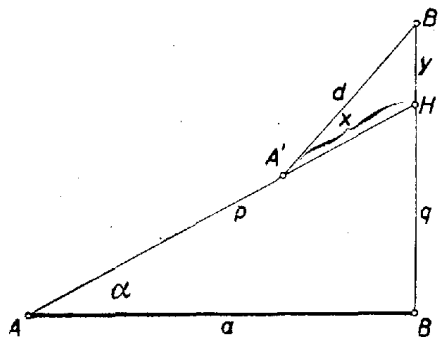
Figyeljük meg, amíg a t_0 értéke még függ a c közös kezdősebességtől, a $d_{\min}$ már c -től független.

Az adott értékekkel

$$d_{\min} = 50\sqrt{3} \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{2}} = 25\sqrt{3} \text{ m.}$$

Plichta Jenő (Mezőkövesd, I. László g. IV. o. t.)

II. megoldás: A nehézségi erő mindkét testnek egyenlő függőleges irányú gyorsulást ad, és ezáltal egyenlő függőleges irányú eltolódást okoz, ami viszont a két testnek egymástól való távolságát nem befolyásolja, és így feladatunknál a nehézségi erőtől eltekinthetünk. Tehát az ABH derékszögű háromszög (lásd ábrát) $AH = p$ átfogóján és $BH = q$ befogóján egyaránt c sebességgel haladó testek távolságának minimumát vizsgáljuk. A mozgás kiindulása A és B -ből egyidejű. t idő múlva az átfogón mozgó test A' -be, a befogón mozgó test B' -be ér. $AA' = BB' = ct$.



Tekintsük változónak az

$$x = p - ct, \quad y = ct - q$$

mennyiségeket. Ez esetben $x + y = p - q$ állandó.

Nyilvánvaló, hogy amíg $x > 0$, és $y < 0$, addig t növekedésével az $A'B' = d$ távolság fog, és $x < 0$, $y > 0$ esetén pedig t növekedésével d is növekszik (mégpedig minden határon túl), tehát minimum csak $x > 0$, $y > 0$ esetén lehet.

Ez esetben a cosinustétel értelmében

$$(1) \quad \begin{aligned} d^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \cos(90^\circ + \alpha) = x^2 + 2xy + y^2 - 2xy + 2xy \sin \alpha = \\ &= (x + y)^2 - 2xy(1 - \sin \alpha). \end{aligned}$$

Mivel $x + y$ állandó, azért d^2 akkor lesz minimális (figyelembe véve, hogy $1 - \sin \alpha > 0$), ha xy maximális. Ha két mennyiség összege állandó, a mértani közép akkor maximális, ha a két mennyiség egyenlő. Tehát xy akkor maximális, ha $x = y$, vagyis $x + y = 2x = p - q$, azaz $x = y = \frac{p - q}{2}$.

Most kiszámíthatjuk a t_0 értékét, annak alapján, hogy $p - ct_0 = ct_0 - q$ vagyis $t_0 = \frac{p + q}{2c}$, de inkább megmutatjuk, hogy az I. megoldástól eltérően t_0 kiszámítása nélkül is meghatározhatjuk $d_{\min}$ értékét.

Ugyanis (1) alapján

$$(2) \quad \begin{aligned} d_{\min}^2 &= (p - q)^2 - \frac{(p - q)^2}{2}(1 - \sin \alpha) = \frac{(p - q)^2}{2} + \frac{(p - q)^2}{2} \sin \alpha = \\ &= \frac{(p - q)^2}{2}(1 + \sin \alpha). \end{aligned}$$

Mivel $p = \frac{a}{\cos \alpha}$ és $q = a \operatorname{tg} \alpha$, azért

$$p - q = \frac{a}{\cos \alpha} - \frac{a \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a(1 - \sin \alpha)}{\cos \alpha}$$

és így (2) alapján

$$d_{\min}^2 = \frac{a^2(1 - \sin \alpha)^2}{2 \cos^2 \alpha}(1 + \sin \alpha) = \frac{a^2(1 - \sin^2 \alpha)(1 - \sin \alpha)}{2 \cos^2 \alpha} = \frac{a^2(1 - \sin \alpha)}{2},$$

ahonnan

$$d_{\min} = a \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{2}}.$$

Bártfai Pál (Bp., I., Petőfi g. III. o. t.)