

I. megoldás: Kiszámítjuk a háromszög szögeinek cosinusát, majd kifejezzük rendre a köréírt kör középpontjának az egyes oldalaktól mért távolságát kétféleképpen. Így három egyenlethez jutunk, melyekből a köréírt kör középpontjának két koordinátája és a kör sugara kiszámítható.

Legyenek a háromszög szögei $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Tangenseiknek abszolút értékét az $m_1 = \frac{1}{3}, m_2 = 7, m_3 = -\frac{1}{2}$ iránytényezőkől nyerjük:

$$|\operatorname{tg} \omega_1| = \left| \frac{m_2 - m_3}{1 + m_1 m_2} \right| = \frac{7 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{7}{2}} = 3, \text{ hasonlóan } |\operatorname{tg} \omega_2| = 1, |\operatorname{tg} \omega_3| = 2.$$

Mivel mind a három tangens abszolút értéke legalább 1, azért a háromszög hegyesszögű és így mindhárom szög cosinusa pozitív.

$$\cos \omega = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \omega}} \text{ alapján}$$

$$\cos \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \cos \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \omega_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

A köréírt kör középpontjának távolsága a háromszög oldalaitól:

$$(1) \quad d_1 = r \cos \omega_1 = \frac{r}{\sqrt{10}}, \quad d_2 = \frac{r}{\sqrt{2}}, \quad d_3 = \frac{r}{\sqrt{5}}.$$

Jelöljük a középpont koordinátáit x_0 és y_0 -val. A kör középpontjának az oldalaktól mért távolsága

$$(2) \quad d_1 = \frac{x_0 - 3y_0 - 2}{\sqrt{10}}, \quad d_2 = \frac{y_0 - 7x_0 + 34}{5\sqrt{2}}, \quad d_3 = \frac{x_0 + 2y_0 + 8}{\sqrt{5}}.$$

Az (1) és (2) egyenletek összehasonlítása alapján

$$r = x_0 - 3y_0 - 2, \quad 5r = y_0 - 7x_0 + 34, \quad r = x_0 + 2y_0 + 8.$$

Megoldva a nyert egyenletrendszert

$$x_0 = 1, \quad y_0 = -2, \quad r = 5,$$

tehát a háromszög köré írt kör egyenlete:

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25.$$

Bártfai Pál (Bp., I., Petőfi g. III. o. t.)

II. megoldás: Jelöljük a három egyenes egyenletét $L_1 = 0, L_2 = 0, L_3 = 0$ -val.

Képezzük a következő kifejezést:

$$K = L_1 L_2 + \lambda L_2 L_3 + \mu L_3 L_1,$$

ahol λ és μ tetszőleges valós értéket jelent.

A felírt kifejezés másodfokú (két-két elsőfokú kifejezés szorzatának összege). Tetszőlegesen választott λ és μ mellett $K = 0$ egy kúpszelet egyenlete. λ és μ különböző értékei mellett K más és más kúpszeletet jelent.

A $K = 0$ egyenlettel jellemzett összes másodrendű görbe átmegy az adott egyenesek metszéspontjain. Ugyanis pl. az $L_1 = 0$ és $L_2 = 0$ egyenesek metszéspontjainak koordinátáit behelyettesítve, bármekkora λ -t és μ -t, a K kifejezésnek nemcsak az első tagja lesz 0, hanem a második tag is (mert $L_2 = 0$) és a harmadik is (mert $L_1 = 0$). Feladatunk λ -t, s μ -t úgy megválasztani, hogy $K = 0$ éppen kör egyenlete legyen. Ennek a feltétele, hogy x^2 és y^2 -es tag együtthatója egyenlő legyen, továbbá, hogy az xy -os tag együtthatója 0 legyen.

Írjuk ki a K -t részletesen.

$$K = (x - 3y - 2)(7x - y + 34) + \lambda(7x - y - 34)(x + 2y + 8) + \mu(x + 2y + 8)(x - 3y - 2) = 0.$$

Rendezve

$$(7 + 7\lambda + \mu)x^2 + (-22 + 13\lambda - \mu)xy + (3 - 2\lambda - 6\mu)y^2 + (-48 + 22\lambda + 6\mu)x + (104 - 76\lambda - 28\mu)y + (68 - 272\lambda - 16\mu) = 0.$$

Feltételünk szerint:

$$\begin{aligned} 7 + 7\lambda + \mu &= 3 - 2\lambda - 6\mu, \\ -22 + 13\lambda - \mu &= 0, \end{aligned}$$

mely egyenletekből

$$\lambda = \frac{3}{2}, \quad \mu = -\frac{5}{2}.$$

A nyert értékeket K -ba helyettesítve, átrendezés után a

$$15x^2 + 15y^2 - 30x + 60y - 300 = 0$$

egyenlethez jutunk. 15-tel egyszerűsítve

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25.$$

Előfordulhat, hogy a paraméterek meghatározására szolgáló egyenletek nem függetlenek egymástól, így nem alkalmasak λ és μ kiszámítására. Ez akkor következik be, ha az adott egyenesek közül kettő párhuzamos, mely esetben feladatunknak nincs megoldása. (Ilyenkor a háromszög egyik csúcspontja a végtelenben van és a körülírt kör elfajul egy végesben fekvő egyenessé (háromszögoldal) és a sík végtelenben fekvő egyenesévé.)

Bauer Károly (Pécs, Bányaip. techn. IV. o. t.)