

1. megoldás: A feladat így is fogalmazható: Az első n természetes szám összege $\frac{n(n+1)}{2}$ lehet-e $111k$ alakú? Tehát az

$$(1) \quad \frac{n(n+1)}{2} = 111k$$

határozatlan egyenletet kell megoldani, ahol $k = 1, 2, \dots, 9$. (1) így írható

$$n^2 + n - 222k = 0,$$

amiből a pozitív gyök

$$n = \frac{-1 + \sqrt{1 + 888k}}{2},$$

$\sqrt{1 + 888k}$ -nak tehát páratlan egésznek kell lennie, vagyis $1 + 888k$ páratlan négyzetszám. Mivel négyzetszám 7-re, 3-ra és 2-re nem végződhet; azért csak $k = 1, 3, 5, 6, 8$ lehetséges.

Ezeket kipróbálva $k = 6$ esetén

$$1 + 888k = 5329 = 73^2$$

Tehát $n = \frac{-1 + 73}{2} = 36$. A három számjegyű összeg $111k = 666$.

Roboz Ágnes (Bp., VI., Varga K. lg. III. o. t.)

II. megoldás: (1) a következőképpen is írható

$$(2) \quad n(n+1) = 2 \cdot 3 \cdot 37k$$

A feladat szerint

$$0 < \frac{n(n+1)}{2} < 1000,$$

vagyis

$$0 < n^2 < 2000,$$

azaz

$$(3) \quad 0 < n < 45.$$

Mivel (2)-ben a baloldal: $n(n+1)$ szükségképpen osztható 37-tel, azért (3) figyelembevételével, vagy $n = 37$, vagy $n+1 = 37$.

Ha $n = 37$, akkor $38 = 6k$, amely esetben k nem lehet egész.

Ha $n+1 = 37$, akkor $n = 36 = 6k$ és $k = 6$.

Orlik Péter (Bp., V., Eötvös g. II. o. t.)