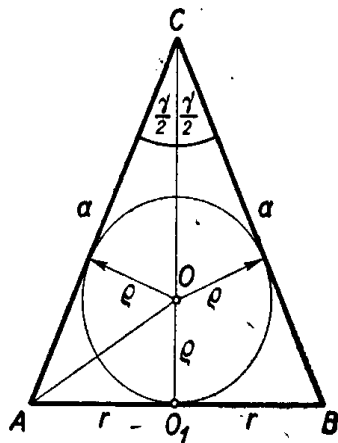


Tekintsük a forgáskúp és beírt gömb egy tengelymetszetét. A betűzést az ábra mutatja.



A feladat értelmében

$$\frac{2r\pi a}{3} = 4\rho^2\pi,$$

vagyis

$$(1) \quad ar = 6\rho^2.$$

Ismeretes, hogy a háromszög területe a kerület $(2s)$ és a beírt kör sugarával kifejezve $t = s\rho$. Másrészt a háromszög területe $AO_1 \cdot O_1C = r\sqrt{a^2 - r^2}$, és így (mivel jelen esetben $s = a + r$)

$$(a + r)\rho = r\sqrt{a^2 - r^2},$$

vagyis

$$\rho = r \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a + r} = r \sqrt{\frac{(a - r)(a + r)}{(a + r)^2}} = r \frac{\sqrt{a - r}}{a + r},$$

Ezen értékeket (1)-be helyettesítve

$$ar = \frac{6r^2(a - r)}{a + r},$$

vagyis

$$a^2 + ar = 6ar - 6r^2,$$

azaz

$$6r^2 - 5ar + a^2 = 0,$$

ahonnan

$$r_1 = \frac{a}{2}, \quad r_2 = \frac{a}{3}.$$

A kúp félnyílása $\frac{\gamma}{2}$, tehát

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{a},$$

vagyis

$$\begin{aligned} \sin \frac{\gamma_1}{2} = \frac{r_1}{a} = \frac{1}{2}, & \quad \text{amiből} \quad \frac{\gamma_1}{2} = 30^\circ, \text{ és így } \gamma_1 = 60^\circ, \\ \sin \frac{\gamma_2}{2} = \frac{r_2}{a} = \frac{1}{3}, & \quad \text{amiből} \quad \frac{\gamma_2}{2} = 19^\circ 28', \text{ és így } \gamma_2 = 38^\circ 56'. \end{aligned}$$