I. megoldás: Az ismert

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{1}$$

azonosság alapján $\cos x+\cos 3x=2\cos 2x\cos x$, és $\cos 2x+\cos 4x=2\cos 3x\cos x$.

Tehát a megoldandó egyenlet így is írható:

$$2\cos x(\cos 2x+\cos 3x)=0 \tag{2}$$

A baloldal zárójeles tényezőjére ismét alkalmazva (1)-et

$$\cos 2x+\cos 3x=2\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2},$$

mely értéket behelyettesítve (2)-be, nyerjük

$$4\cos x\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}=0.$$

Ez akkor teljesül, ha a baloldal valamely tényezője 0.

a) $\cos x=0$, amiből

$$x_1=\frac{\pi}{2}\pm 2k\pi,$$
$$x_2=\frac{3\pi}{2}\pm 2k\pi\ (k=0,1,2,\ldots).$$

b) $\cos\frac{5x}{2}=0$, amiből

$$x_3=\frac{\pi}{5}\pm 2k\pi,\qquad x_4=\frac{3\pi}{5}\pm 2k\pi,\qquad x_5=\pi\pm 2k\pi,$$
$$x_6=\frac{7\pi}{5}\pm 2k\pi,\qquad x_7=\frac{9\pi}{5}\pm 2k\pi,\qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

c) $\cos\frac{x}{2}=0$, egyenlet gyökei a *b)* alatti egyenlet gyökei között már elő fordulnak.

Mivel az egyenleten csak azonos átalakításokat végeztünk, a kapott értékek valóban gyökei az eredeti egyenletnek.

Csiszár Imre (Bp., I., Petőfi g. II. o. t.)

II. megoldás: A baloldal minden tagját az ismert goniometriai azonosságok felhasználásával kifejezzük $\cos x$ hatványaival:

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1,\qquad \cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x,$$
$$\cos 4x=8\cos^4 x-8\cos^2 x+1$$

Behelyettesítés, rendezés és $2\cos x$ kiemelése után adódik

$$2\cos x(4\cos^3 x+2\cos^2 x-3\cos x-1)=0.$$

Innen vagy

$$\cos x=0, \tag{1}$$

vagy

$$4\cos^3 x+2\cos^2 x-3\cos x-1=0. \tag{2}$$

Vegyük észre, hogy

$$\cos x=-1 \tag{3}$$

kielégíti a (2) alatti egyenletet. Osztva a $(\cos x+1)$ gyöktényezővel, $\cos x$ további lehetséges értékeire a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$4\cos^2 x-2\cos x-1=0, \tag{4}$$

ahonnan

$$\cos x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \tag{5}$$

Az (1), (3) és (5) alatt nyert négyféle $\cos x$ értékhez tartozó x gyökök megegyeznek az I. megoldásban talált gyökökkel.

Grätzer György (Bp., VI., Kölcsey g. IV. o. t.)