

a) **I. megoldás:** $S_1 = \frac{1}{2} = 2 - \frac{2+1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} = 2 - \frac{2+2}{2^2}$, vagyis $n = 1$ és $n = 2$ -re az $S_n = 2 - \frac{2+n}{2^n}$ képlet helyes. Teljes indukcióval bizonyítjuk a képlet általános helyességét. Tegyük föl, hogy valamely k természetes számra képletünk igaz, vagyis

$$S_k = 2 - \frac{2+k}{2^k},$$

akkor

$$S_{k+1} = S_k + \frac{k+1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{2+k}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{4+2k-k-1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{2+(k+1)}{2^{k+1}}.$$

Tehát képletünk, ha k -ra igaz, akkor $(k+1)$ -re is igaz, de 1-re (és 2-re) láttuk, hogy igaz, amiből következik, hogy képletünk minden természetes számra fennáll.

Weisz Katalin (Bp., I., Szilágyi Erzsébet lg. IV. o. t.)

II. megoldás: S_n a következő alakban írható

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} + \\ &+ \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \\ &+ \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \\ &\vdots \\ &+ \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{2^k} + \\ &\vdots \\ &+ \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Az egymás alatti tagok összegét rendre $s_1, s_2, \dots, s_k, \dots, s_n$ -nel jelölve s_k olyan mértani sor összege, melynek első tagja $\frac{1}{2^k}$ hányadosa $\frac{1}{2}$ és tagjainak száma $n - k + 1$, vagyis

$$S_k = \frac{1}{2^k} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Tehát

$$\begin{aligned} S_n &= s_1 + s_2 + \dots + s_k + \dots + s_n = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^k + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \\ &= 1 \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{2+n}{2^n}. \end{aligned}$$

Behringer Tibor (Bp., III., Árpád g. I. o. t.)

III. megoldás:

$$(1) \quad S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n}.$$

Mindkét oldalt $\frac{1}{2}$ -vel szorozva:

$$(2) \quad \frac{S_n}{2} = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \dots + \frac{n-1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}}$$

(1)-ből (2)-t kivonva

$$\frac{S_n}{2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) - \frac{n}{2^{n+1}},$$

ahol a zárójelben mértani sor van, melynek hányadosa $\frac{1}{2}$, tehát

$$\frac{S_n}{2} = \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}},$$

vagyis

$$S_n = 2 - \frac{2+n}{2^n}.$$

Tömböl István (Pécs, Bányai. mélyép. techn. III. o. t.)

b) I. megoldás: A teljes indukció módszere természetesen itt is célhoz vezet.

$$n = 1\text{-re } S_1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

Tegyük fel, hogy

$$S_k = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} \text{ is helyes,}$$

akkor

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (k+1)(k+2)(k+3) = \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3) + 4(k+1)(k+2)(k+3)}{4} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}. \end{aligned}$$

Tehát tényleg az $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ képlet minden természetes n -re igaz.

Rázga Tamás (Bp., II., Rákóczi g. II. o. t.)

II. megoldás: Vizsgáljuk a következő sor összegét:

$$S_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2)(n+3).$$

Vonjuk ki ebből az összegből önmagát, de úgy, hogy a kivonandó k -adik tagját a kisebbítendő $k+1$ -edik tagjából vonjuk ki:

$$\begin{aligned} S_n - S_n &= 0 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (5-1) + 3 \cdot 4 \cdot 5(6-2) + \\ &+ \dots + n(n+1)(n+2)[(n+3) - (n-1)] - n(n+1)(n+2)(n+3) \\ &= 4 \cdot S_n - n(n+1)(n+2)(n+3). \end{aligned}$$

vagyis

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Kálmán György (Szolnok, Beloiannis g. III. o. t.)

III. megoldás: A sor k -adik tagja $k(k+1)(k+2) = k^3 + 3k^2 + 2k$. A sor tehát átrendezhető a következő alakba:

$$S_n = (1^3 + 2^3 + \dots + n^3) + 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 2(1 + 2 + \dots + n)$$

A zárójelben lévő köbszámok, négyzetszámok és természetes számok összegének képlete ismert, azokat felhasználva

$$S_n = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 + 3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Jónás József (Gyöngyös, Vak Bottyán g. III. o. t.)