I. megoldás: A baloldalon szereplő gyök alatti mennyiség az $\alpha = 90^\circ \pm k\cdot 360^\circ$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ értékek kivételével mindenütt értelmezve van és értéke seholsem negatív.

Ha a gyököt pozitív előjellel tekintjük, akkor az azonosság csak azokra az α értékekre állhat fenn, amelyekre $45^\circ + \frac{\alpha}{2}$ az I. és III. szögnegyedben van.

A baloldalt átalakítjuk:

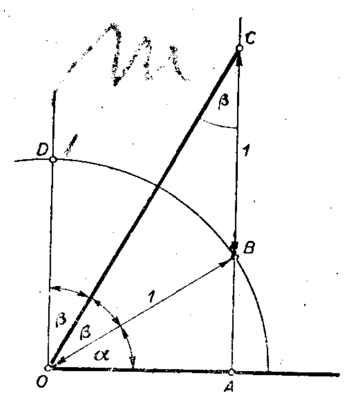
$$\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{\sin 90^\circ + \sin\alpha}{\sin 90^\circ - \sin\alpha}} = \sqrt{\frac{2\sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}}. \tag{1}$$

Mivel az $\frac{\alpha}{2} = 45^\circ \pm k\cdot 180^\circ$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ értékek kizártak, az (1) alatti kifejezés:

$$\sqrt{\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{cotg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} = \sqrt{\operatorname{tg}^2\left(45^\circ + \frac{a}{2}\right)} = \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right).$$

Ha $45^\circ + \frac{\alpha}{2}$ a II. ill. IV. szögnegyedben van, akkor a négyzetgyökök előjelei megfelelőképpen veendők.

II. megoldás: Az egységsugarú körben (l. ábrát), legyen az $AOB\sphericalangle = \alpha$, $OB = 1$, $AB = \sin\alpha$, $OA = \cos\alpha$.



Az AB távolságot hosszabbítsuk meg B-n túl $BC = 1$-gyel. Az $OCB\sphericalangle$-et β-val jelölve, a $BOC\sphericalangle$ is egyenlő β-val, mert az OBC háromszög egyenlőszárú. A $COD\sphericalangle = \beta$, mint váltószög, ha $DO \perp OA$.
Tehát $2\beta + \alpha = 90^\circ$, vagyis

$$\beta = \frac{90^\circ - \alpha}{2} = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}, \quad \text{és így} \quad \alpha + \beta = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

Az OAC derékszögű háromszögben

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+AB}{OA} =$$

$$= \frac{1+AB}{\sqrt{1-AB^2}} = \sqrt{\frac{(1+AB)^2}{(1+AB)(1-AB)}} = \sqrt{\frac{1+AB}{1-AB}} = \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}.$$

Ez a bizonyítás a többi térnegyedre is kiterjeszthető.

Biczó Géza (Bp., II., Rákóczi g. III. o. t.)

III. megoldás:

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{90^\circ + \alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos(90^\circ+\alpha)}{1+\cos(90^\circ-\alpha)}} = \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}.$$

Természetesen itt is ki kell zárni az $\alpha = \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ értékeket és a gyök előjelét kellőképpen venni.

Quittner Pál (Bp., I., Petőfi g. III. o. t.)