

I. megoldás:

a) Mivel a nevező

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$$

minden valós x -re, azért a függvény az egész számegyenesen értelmezve van.b) Határozzuk meg a görbe zéró-helyeit, vagyis azokat a pontokat, amelyekben a görbe az x -tengelyt metszi.
 $y = 0$, ha a számláló

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

vagyis, ha

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

(A nevező, mint láttuk, sohasem egyenlő 0-val.)

c) $x = 0$ esetén $y = -1$. Ha $x \neq 0$, akkor függvényünk írható ilyen alakban

$$y = 1 - 2 \frac{x+1}{x^2+x+1} = 1 - 2 \frac{1 + \frac{1}{x}}{x+1 + \frac{1}{x}}.$$

Ha itt x abszolút értéke elég nagy (és mondjuk 1-nél mindenesetre nagyobb), akkor a tört számlálójának abszolút értéke mindenesetre kisebb, mint pl. 2, míg a nevező abszolút értéke tetszőlegesen nagy lesz. A tört abszolút értéke tehát tetszőlegesen kicsi lesz. Így tehát, ha x abszolút értéke minden határon túl nő, akkor y tetszőleges pontossággal megközelíti az 1 értéket. Egyébként az $\frac{x+1}{x^2+x+1}$ tört pozitív, ha $x > -1$, negatív, ha $x < -1$, így (a »-2« szorzóra is figyelve) negatív x -ekre felülről, pozitívokra alulról közeledik a függvény görbéje az $y = 1$ egyeneshez (aszimptotához).

d) Határozzuk meg a függvény szélső értékeit. E célból x -et fejezzük ki y -nal. Mivel a nevező sohasem 0, azért

$$y(x^2 + x + 1) = x^2 y + xy + y = x^2 - x - 1,$$

vagyis

$$x^2(y-1) + x(y+1) + (y+1) = 0,$$

amiből

$$x = \frac{-(y+1) \pm \sqrt{(y+1)^2 - 4(y^2-1)}}{2(y-1)}$$

 x csak akkor valós, ha a diszkrimináns

$$(1) \quad (y+1)^2 - 4(y^2-1) = -3y^2 + 2y + 5 \geq 0.$$

Mivel a

$$-3y^2 + 2y + 5 = 0$$

egyenlet gyökei

$$y_1 = -1, \quad \text{és} \quad y_2 = \frac{5}{3},$$

azért az (1) alatti egyenlőtlenség teljesül, ha

$$-1 \leq y \leq \frac{5}{3}.$$

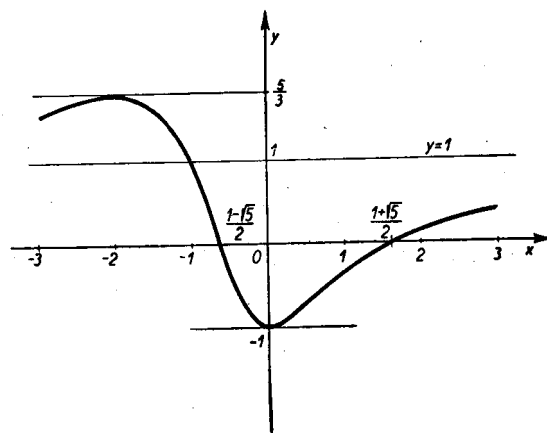
Tehát y szélső értékei:

$$y_{\min} = -1 \quad \text{amikor} \quad x = 0,$$

$$y_{\max} = \frac{5}{3}, \quad \text{amikor} \quad x = -2.$$

Behelyettesítéssel nyerjük a következő értéktáblázatot

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{11}{7}$	$\frac{5}{3}$	1	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{13}$



Bauer Károly (Pécs, Bányaiipari techn. IV. o. t.)

II. megoldás:

A szélső értékeket a következőképpen is meghatározhatjuk. Alakítsuk át a függvényt:

$$y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 + x + 1} = 1 - 2 \frac{x + 1}{x(x + 1) + 1} = 1 - \frac{2}{x + \frac{2}{x + 1}} =$$

$$= 1 - \frac{2}{(x + 1) + \frac{1}{x + 1} - 1}.$$

y akkor minimális, ha a második tag maximális, vagyis ha a második tag nevezője a nem negatív számok körében minimális. De $x + 1 + \frac{1}{x + 1}$ a nem negatív számok körében minimális, ha $x + 1 = \frac{1}{x + 1} = 1$, vagyis $x = 0$, amely esetben $y_{\min} = -1$.

y maximális, ha a második tag minimális, vagyis a nevező a negatív számok körében maximális. De $x + 1 + \frac{1}{x + 1}$ a negatív számok körében maximális, ha $x + 1 = \frac{1}{x + 1} = -1$, amiből $x = -2$ és $y_{\max} = \frac{5}{3}$.

Csiszár Imre (Bp. I., Petőfi g. II. o. t.)

III. megoldás:

A szélső érték meghatározásának egy harmadik módja a következő:

$$y = \frac{2x^2}{x^2 + x + 1} - 1 = \frac{2}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 = \frac{2}{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - 1.$$

y akkor maximális, ha az első tag maximális, vagyis az első tag nevezője minimális. $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)^2$ egy sohasem negatív mennyiség, amely akkor minimális, ha értéke 0, vagyis ha $x = -2$, amikor is $y_{\max} = \frac{5}{3}$.

y minimális, ha az első tag nevezője maximális, vagyis $\frac{1}{x}$ maximális. Utóbbi minden határon túlnő, ha x 0-hoz közeledik; így ekkor a tört értéke is (mely mindig pozitív) 0-hoz közeledik, tehát $y_{\min} = -1$.

Vigassy József (Bp. I., Petőfi g. IV. o. t.)