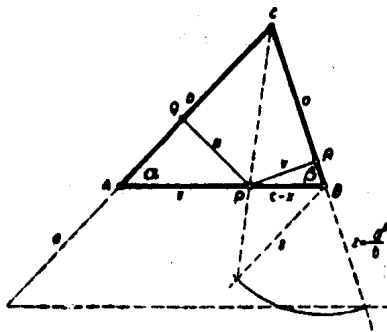


I. megoldás: A betűzést az 1. ábra mutatja.



1. ábra

Ha $AP = x$, akkor $BP = c - x$, és a két merőleges $u = x \sin \alpha$, $v = (c - x) \sin \beta$.

Tehát az

$$u^2 + v^2 = x^2 \sin^2 \alpha + (c - x)^2 \sin^2 \beta = x^2 (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta) - 2cx \sin^2 \beta + c^2 \sin^2 \beta$$

másodfokú függvény minimumát keressük.

Ismeretes, hogy az $y = ax^2 + bx + c$ függvény szélső értékét az $x = -\frac{b}{a}$ helyen veszi fel, és e szélső érték minimum, ha $a > 0$.

Tehát jelen esetben – mivel $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta > 0$ – minimum van az

$$x = \frac{c \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta}$$

helyen, amikor

$$c - x = \frac{c \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta},$$

és így a sinustétel felhasználásával

$$AP : PB = x : (c - x) = \sin^2 \beta : \sin^2 \alpha = b^2 : a^2.$$

Deseő Zoltán (Bp. X., I. László g. IV. o. t.)

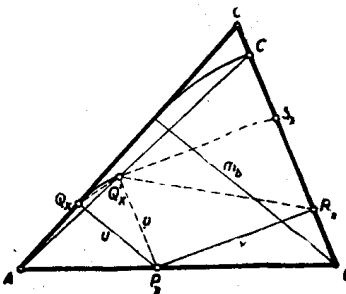
Megjegyzés: A kiszámított arány alapján a P pont könnyen meg is szerkeszthető. Pl.

$$b^2 : a^2 = b : \frac{a^2}{b} = b : z, \quad \text{ahol} \quad b : a = a : z.$$

A z szakasz tehát negyedik arányosként nyerhető. A szerkesztés az 1. ábráról leolvasható.

II. megoldás: Számítás nélkül tisztán geometriai megfontolásokkal is megszerkeszthető a P pont.

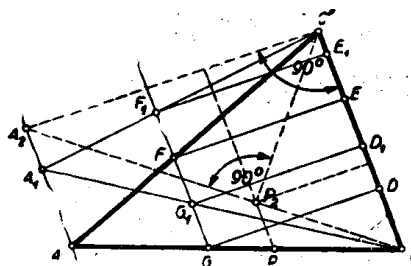
Vegyünk fel az AB oldalán egy tetszőleges P_x pontot. A P_x -ből bocsátott merőlegesek talppontjai legyenek Q_x és R_x (2. ábra).



2. ábra

Ha P_x végigfut az AB oldalon, akkor a $P_x Q_x Q'_x$ egyenlő szárú háromszögek mind hasonlóak és perspektív helyzetűek az A centrumra nézve, vagyis a Q'_x pontok mértani helye az AQ'_x egyenes, amely a BC oldalt a C' pontban metszi, ahol BC' nyilván nem egyéb, mint a B -ből kiinduló m_b magasság elforgatása $P \equiv B$ körül. Pythagoras tétele alapján $u^2 + v^2 = Q'_x R_x^2$. $Q'_x R_x$ pedig a $P_x Q'_x S_x R_x$ téglalap átlója, amely téglalap az $ABC'\Delta$ -be van írva oly módon, hogy az $R_x S_x$ oldalának hordozója a háromszög BC' oldala.

Hogy ezt meghatározzuk, toljuk el az A csúcsponot a BC' oldallal párhuzamosan egy tetszőleges A_1 -be (3. ábra).



Az $ABC'\Delta$ -be írt $DEFG$ téglalap akkor eltolódik az $A_1CB\Delta$ -be írt $D_1E_1F_1G_1$ téglalapba, amely egybevágó az előbbi téglalappal, mert $G_1F_1 : BC' = A_1G_1 : A_1B = AG : AB = GF : BC'$, és így

Ha az A pontot az A_2 pontba toljuk, ahol $A_2C' \perp C'B$ -re, akkor problémánk így hangzik: A $BC'A_2$ derékszögű háromszögbe írt téglalapok közül, amelyeknek egyik csúcspontja a C' pont, melyiknek átlója minimális? Az A_2B átfogón lévő P_2 téglalapcsúcspontnak a C' csúcsponttól való távolsága a téglalap egyik átlója, amely nyilván akkor minimális, ha $C'P_2 \perp A_2B$.

Szendrei István (Kunszentmiklós, Damjanich g. III. o. t.)

$$A_2C'^2 = m_a^2 = A_2B \cdot A_2P_2$$

Tehát

$$\frac{m_a^2}{m_b^2} = \frac{A_2 P_2}{P_2 B} = \frac{AP}{PB}.$$

A területképlet alapján azonban $\frac{m_a}{m_b} = \frac{b}{a}$, és így $\frac{AP}{PB} = \frac{b^2}{a^2}$, ami egyezik az I. megoldásban nyert eredménnyel.