

I. megoldás: Az igazolandó egyenlőség így is írható:

$$2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin^2 \gamma = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta.$$

A feltevés szerint $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, tehát

$$\cos \gamma = -\cos(\alpha + \beta) \quad \text{és} \quad \sin \gamma = \sin(\alpha + \beta).$$

Ezen értékeket (1) baloldalába helyettesítve, a baloldalt átalakítjuk, míg azonos a jobboldallal:

$$\begin{aligned} & -2 \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha + \beta) + \sin^2(\alpha + \beta) = \\ & = -2 \sin \alpha \sin \beta (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)^2 = \\ & = 2 \sin^2 \beta \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha \cos \beta + \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \\ & + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta = \\ & = \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta = \\ & = \sin^2 \alpha (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) + \sin^2 \beta (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta. \end{aligned}$$

Rázga Tamás (Bp. II., Rákóczi g. II. o. t.)

II. megoldás: Átalakítjuk egyenlőségünk jobboldalát:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma &= \sin^2 \alpha + (\sin \beta + \sin \gamma)(\sin \beta - \sin \gamma) = \\ &= \sin^2 \alpha + 2 \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2} \cdot 2 \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \sin \frac{\beta - \gamma}{2} = \\ &= \sin^2 \alpha + 2 \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \cdot 2 \sin \frac{\beta - \gamma}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2} = \\ &= \sin^2(\beta + \gamma) + \sin(\beta + \gamma) \sin(\beta - \gamma) = \sin(\beta + \gamma) [\sin(\beta + \gamma) + \sin(\beta - \gamma)] = \\ &= \sin \alpha 2 \sin \beta \cos \gamma = 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma, \text{ ami bizonyítandó volt.} \end{aligned}$$

Fuchs Tamás (Bp. II., Rákóczi g. III. o. t.)

III. megoldás: A cosinus-tétel alapján

$$2 \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{b}.$$

Felhasználva a sinus-tételt:

$$2 \cos \gamma = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} - \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}.$$

Mindkét oldalt (a 0-tól különböző) $\sin \alpha \sin \beta$ -val szorozva

$$2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma.$$

Bonyhárd Péter (Apáczai Csere J. g. III. o. t.)