

I. megoldás: β és γ közül egyik nem lehet derékszög, mert ez ellentmond a feltételnek, $\beta = \gamma = 90^\circ$ pedig éppúgy ki van zárva, mint a 0° ill. 180° , mivel β és γ egy háromszög szögei. Tehát β és γ sinusa és cosinusa 0-tól különböző.

A $\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$ és $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma}$ értékeket helyettesítve:

$$\frac{\sin \beta \sin^2 \gamma}{\cos \beta} = \frac{\sin \gamma \sin^2 \beta}{\cos \gamma}.$$

Mivel $\sin \beta \sin \gamma \neq 0$, azért egyszerűsítve

$$(1) \quad \frac{\sin \gamma}{\cos \beta} = \frac{\sin \beta}{\cos \gamma},$$

vagyis $2 \cos \beta \cos \gamma$ -val szorozva

$$2 \sin \gamma \cos \gamma = 2 \sin \beta \cos \beta, \quad \text{azaz} \quad \sin 2\gamma = \sin 2\beta.$$

Ebből következik, hogy
vagy

$$\beta = \gamma,$$

amely esetben a *háromszög egyenlőszárú*,
vagy

$$2\gamma = 180^\circ - 2\beta,$$

azaz

$$\beta + \gamma = 90^\circ$$

és így $\alpha = 90^\circ$, vagyis a *háromszög derékszögű*.

Uray László (Bp. VIII., Piarista g. III. o. t.)

II. megoldás: Az I. megoldás (1) alatti egyenlősége így is írható:

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{\cos \beta}{\cos \gamma}.$$

A sinus-tétel értelmében $\frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{c}{b}$, a cosinus-tétel szerint pedig $\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, és $\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, amely értékeket (2)-be helyettesítve

$$\frac{c}{b} = \frac{b(a^2 + c^2 - b^2)}{c(a^2 + b^2 - c^2)},$$

vagyis

$$a^2 c^2 + b^2 c^2 - c^4 = a^2 b^2 + b^2 c^2 - b^4,$$

amiből

$$b^4 - c^4 = a^2(b^2 - c^2),$$

azaz

$$(b^2 - c^2) [(b^2 + c^2) - a^2] = 0.$$

Ha az első tényező 0, akkor $b = c$, vagyis a *háromszög egyenlőszárú*.

Ha a második tényező 0, vagyis $b^2 + c^2 = a^2$, akkor a Pythagoras-tétel megfordítása alapján a *háromszög derékszögű*.

Roboz Ágnes (Bp. VI., Varga Katalin lg. III. o.)