I. megoldás: Ismeretes, hogy $\mathrm{tg}\alpha = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$ tehát,

$$\mathrm{tg}15^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}} = \frac{\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2-\sqrt{3}.$$

Teljesen hasonlóan (vagy $\mathrm{cotg}15^\circ = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\ 15^\circ}$ alapján)

$$\mathrm{cotg}\ 15^\circ = 2+\sqrt{3},$$

és így

$$\mathrm{tg}\ 15^\circ + \mathrm{cotg}\ 15^\circ = 2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3} = 4.$$

Marik Miklós (Bp., I., Fürst S. g. IV. o. t.)

II. megoldás: 15°-ot 60° − 45° (vagy 45° − 30°) alakban írva és alkalmazva a $\mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$ képletet.

$$\mathrm{tg}\ (60^\circ - 45^\circ) = \frac{\mathrm{tg}\ 60^\circ - \mathrm{tg}\ 45^\circ}{1+\mathrm{tg}\ 60^\circ \mathrm{tg}\ 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}},$$

és így

$$\mathrm{tg}\ 15^\circ + \mathrm{cotg}\ 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2 + \left(\sqrt{3}+1\right)^2}{3-1} = \frac{8}{2} = 4.$$

Dornbach Alajos (Kecskemét, Piarista g. IV. o. t.)

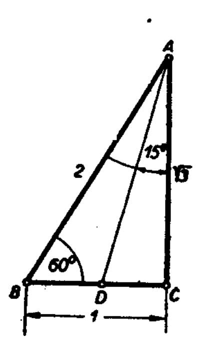
III. megoldás:

$$\mathrm{tg}\ 15^\circ + \mathrm{cotg}\ 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} + \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} + \frac{\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4.$$

Tringer Margit (Kaposvár, Munkácsy Mihály lg. IV. o. t.)

Trigonometriai összefüggések ismerete nélkül, csak pusztán a szögfüggvények értelmezését használva fel, is bebizonyíthatjuk tételünket, amint azt az alábbi két megoldás mutatja.

IV. megoldás: Tekintsük a 60°, 30°-os derékszögű háromszöget, melynek oldalai (a rövidebb befogóval, mint távolságegységgel mérve) tudvalevőleg 1, $\sqrt{3}$, 2 (1. ábra).



1. ábra

A 30°-os szög felezője messe a szemközti egységnyi befogót D-ben. Ismeretes, hogy

$$CD : (1-CD) = \sqrt{3} : \sqrt{2},$$

amiből

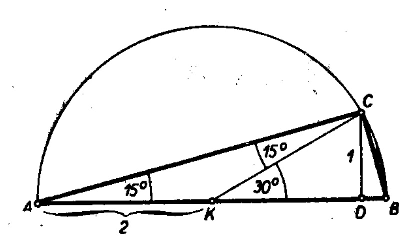
$$CD = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}.$$

Tehát

$$\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{cotg} 15^\circ = \frac{CD}{AC} + \frac{AC}{CD} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} + 2 + \sqrt{3} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} + 2 + \sqrt{3} = 4.$$

Razsondai Zoltán (Bp., VIII., Apáczai Csere g. IV. o. t.)

V. megoldás: Rajzoljunk derékszögű háromszöget 15° és 75°-os szögekkel (2. ábra).



2. ábra

Legyen K a köré írt kör középpontja és D az átfogóhoz tartozó magasság talppontja. $KC = KA$ miatt az $AKC\Delta$ egyenlőszárú és így a $CKD\sphericalangle$, mint külső szög, 30°. Ha a CD magasságot egységnek tekintjük, akkor $AK = KC = \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2$, és így $AB = AK + KB = 2 + 2 = 4$.

A $BCD\Delta$-ben $\operatorname{tg} 15^\circ = DB$, az $ADC\Delta$-ben $\operatorname{cotg} 15^\circ = AD$, és így

$$\operatorname{cotg} 15^\circ + \operatorname{tg} 15^\circ = AD + DB = AB = 4.$$

Lábos Elemér (Sátoraljaújhely, Kossuth g. III. o. t.)