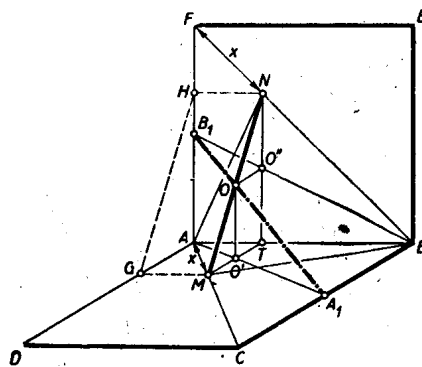


1. A betűzést az 1. ábra mutatja.



1. ábra

Legyen $MG \perp AD$ és $NH \perp AF$, akkor AGM és FHN egyenlőszárú derékszögű háromszögek, amelyeknek átfogója (x) egyenlő. Tehát

$$AGM_{\Delta} \simeq FHN_{\Delta},$$

és így x -től függetlenül mindig

$$MG = NH,$$

vagyis $MN \parallel GH$. Ebből viszont következik, mivel GH állandóan az ADF síkban mozog, hogy MN állandóan párhuzamos az ADF síkkal. (Egy egyenes párhuzamos egy síkkal, ha egy a síkban fekvő egyenessel párhuzamos.)

Mivel $AB \perp$ az ADF síkra (mert e síknak két különböző irányú egyenesére AD - és AF -re merőleges), azért az ADF síkkal párhuzamos MN is állandóan merőleges AB -re. Az MN -en átmenő AB -re merőleges sík messe az AB -t a T pontban. Tehát $MT \perp AB$ és $NT \perp AB$

Az MN távolság O felezőpontjának merőleges vetülete az $ABCD$ síkon szükségképpen MT felezőpontja O' , és O merőleges vetülete az $ABEF$ négyzetre O'' felezi az NT távolságot. (OO' ill. OO'' az MTN derékszögű háromszög középvonalai.) Tehát, ha x változik 0-tól $a\sqrt{2}$ -ig, az O felezőpont leír a térben egy olyan mértani helyet, amelynek merőleges vetülete az $ABCD$ négyzeten az O' pont által befutott AA_1 súlyvonala az ABC_{Δ} -nek, míg az $ABEF$ síkon levő O'' vetület leírja a BB_1 súlyvonalt a BAF_{Δ} -nek. Ebből következik, hogy O pontok mértani helye a B_1A_1 távolság, ahol B_1 az AF négyzetoldal, A_1 a BC négyzetoldal felezőpontja.

2. Pythagoras tételének felhasználásával

$$\begin{aligned} MN^2 &= MT^2 + NT^2 = \left(\frac{AM}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{BN}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}}\right)^2 = \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{2a^2 - 2ax\sqrt{2} + x^2}{2} = x^2 - a\sqrt{2}x + a^2. \end{aligned}$$

Ennek a függvénynek ábrája egy parabolaív a $0 \leq x \leq a\sqrt{2}$ intervallumban. E parabolaív végpontjai: $(0, a^2)$ és $(a\sqrt{2}, a^2)$ pontok.

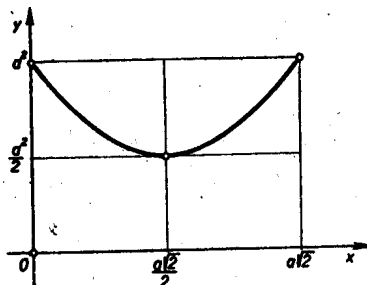
MN^2 így is írható:

$$MN^2 = \left(x - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2},$$

amiből kitűnik, hogy MN^2 , és vele együtt MN értéke minimális, ha a sohasem negatív első tag 0, vagyis, ha

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \text{ mikor is } MN^2 = \frac{a^2}{2}, \text{ azaz } MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Tehát a parabola főtengelye az $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ egyenes, és csúcspontja az $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a^2}{2}\right)$ pont (2. ábra).



2. ábra

3. Mint láttuk, MN minimális, ha $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, vagyis M és N négyzetközéppontok, és MN minimális értéke $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tehát ebben az esetben az AMN és a BNM háromszögek egyenlőoldalúak és így kimondhatjuk: ha MN minimális, akkor $\angle AMN = \alpha = 60^\circ$, és $\angle BNM = \beta = 60^\circ$.

4. Mivel $TA = TM$ és $TB = TN$, azért az

$$\angle ATN_\Delta \simeq \angle MTN_\Delta \simeq \angle MTB_\Delta,$$

mert mindhárom háromszög derékszögű és befogóik egyenlők. Ebből következik az átfogók egyenlősége, vagyis az MNA_Δ és az NMB_Δ egyenlőszárú, AM , ill. BN alappal. Tehát

$$\cos \alpha = \frac{AM}{2 MN} = \frac{x}{2\sqrt{x^2 - ax\sqrt{2} + a^2}},$$

$$\text{és } \cos \beta = \frac{BN}{2MN} = \frac{a\sqrt{2} - x}{2\sqrt{x^2 - ax\sqrt{2} + a^2}}.$$

Ebből kitűnik, hogy az $\alpha = \beta = 90^\circ$ feltevés arra vezetne, hogy x és $a\sqrt{2} - x$ egyidejűleg 0 volna, ami nyilván lehetetlen, tehát tényleg MN nem lehet egyszerre mindkét átlóra merőleges.

5. $x = \frac{a}{2}$ esetén

$$\cos \alpha = \frac{a}{4\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2\sqrt{2}}{2} + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{4 - 8\sqrt{2} + 16}} = \frac{1}{2\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{3,172}},$$

amiből

$$\lg \cos \alpha = 9,5305 - 10,$$

és így

$$\alpha = 70^\circ 10'.$$

Csiszár Imre (Bp., I., Petőfi g. I. o. t.)