

Továbbá teljesülnie kell, hogy

$$(4) \quad \frac{s}{2} + \frac{\sqrt{s^2 - 2ab}}{2} \leq a,$$

és

$$(5) \quad \frac{s}{2} - \frac{\sqrt{s^2 - 2ab}}{2} \leq b.$$

1. Bebizonyítjuk, hogy $a > c > b$ esetén e feltételek mindig teljesülnek.

(3) teljesül, mert ez esetben a baloldal akkor a legkisebb, ha c a legkisebb, vagyis $c = b$, de

$$(a + 2b)^2 = a^2 + 4ab + 4b^2 = a^2 - 4ab + 4b^2 + 8ab = 8ab + (a - 2b)^2 \geq 8ab,$$

ami nyilván igaz.

(4) így írható:

$$\sqrt{s^2 - 2ab} \leq 2a - s.$$

Mivel a nem a legkisebb oldal, azért a jobboldal pozitív és így négyzetre emelve

$$s^2 - 2ab \leq 4a^2 - 4as + s^2,$$

amiből

$$c \leq a,$$

ami feltétel szerint igaz, vagyis (4) teljesül.

(5) is teljesül, mert ha $b > \frac{s}{2}$, akkor (5) nyilvánvaló, ha pedig $b < \frac{s}{2}$ akkor (5) így írható:

$$\frac{\sqrt{s^2 - 2ab}}{2} \geq \frac{s}{2} - b,$$

ahol a jobboldal pozitív, és négyzetre emelés után nyerjük, hogy

$$c \geq b,$$

ami mindenképpen igaz.

Viszont

$$(6) \quad \frac{s}{2} + \frac{\sqrt{s^2 - 2ab}}{2} \leq b$$

nem teljesül, mert ha $b < \frac{s}{2}$, akkor (6) nem teljesülése nyilvánvaló, ha pedig $b \geq \frac{s}{2}$, akkor (6) így is írható

$$\sqrt{s^2 - 2ab} < 2b - s,$$

ahol a jobboldal pozitív, és négyzetre emelés után nyerjük

$$c \leq b,$$

ami ellentmond a feltevésnek.

Tehát a *legnagyobb és legkisebb oldalon mindig van 1 és csakis 1 megoldás*: a két gyök ilyenkor *mindig* valós, és a nagyobbik gyök rámérhető a nagyobbik oldalra (és csakis oda) a kisebbik gyök pedig rámérhető a kisebbik oldalra. (Az 1. ábrán $P_1Q_1 \cdot CP_1 = x_1$, $CQ_1 = y_1$).

2. Az előbbieken láttuk, hogy $a > b$ feltétel mellett (4) csak úgy teljesülhet, ha $c \leq a$, ami azt jelenti, hogy az a és b oldalon, csak úgy lehet megoldás, ha a -nál nagyobb oldala nincs a háromszögnek, más szóval: *a két legkisebb oldalon soha sincs megoldás*.

3. $a > b > c$ esetén is lehet az a , b , azaz a két legnagyobb oldalon megoldás, ha a (3), (4) és (5) alatti feltételek teljesülnek, de ez esetben – mint azt az 1. pontban láttuk – (6) is teljesül, vagyis a nagyobbik gyök a kisebbik oldalra is rámérhető.

Tehát *lehet a két legnagyobb oldalon 2 megoldás*. (Az 1. ábrán P_2Q_2 és P_3Q_3 . $BP_2 = BQ_3 = x_2$, $BP_3 = BQ_2 = y_2$). E két megoldásban a háromszögrészek mindig egybevágóak, de a négyszögrészek nem.

Egyenlő oldalú háromszög esetén ($2s = 3a$) a gyökök a és $\frac{a}{2}$, vagyis a 3 szimmetria-tengely oldja meg a feladatot. Egyenlő szárú háromszög esetén (alap $\leq$ szár) szimmetrikus megoldások lépnek fel; ezeknek taglalását az olvasóra bízuk.