

I. megoldás: Legyen az ellipszis egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

A $P(x_0, y_0)$ pontban az érintő egyenlete

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Ezen érintőnek az $A(-a, 0)$ és $B(a, 0)$ csúcspontokban emelt csúcsérintőkkel való metszéspontja:

$$M\left(-a, \frac{b^2}{y_0} \left(1 + \frac{x_0}{a}\right)\right), \quad \text{ill.} \quad N\left(a, \frac{b^2}{y_0} \left(1 + \frac{x_0}{a}\right)\right)$$

Az $F_1(-c, 0)$ fókuszhoz összekötése M -mel az F_1M egyenes, amelynek irányítányezője

$$m = -\frac{\frac{b^2}{y_0} \left(1 + \frac{x_0}{a}\right)}{a - c}$$

Hasonlóképpen F_1N irányítányezője

$$n = \frac{\frac{b^2}{y_0} \left(1 - \frac{x_0}{a}\right)}{a + c}$$

Az irányítányezők szorzata

$$mn = -\frac{\left(\frac{b^2}{y_0}\right)^2 \left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right)}{a^2 - c^2}$$

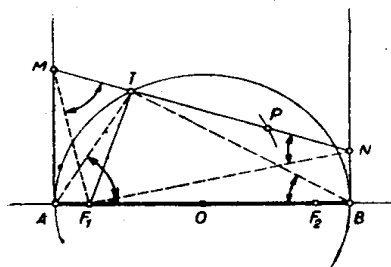
de $a^2 - c^2 = b^2$, és mivel P rajta van az ellipszisen, azért $1 - \frac{x_0^2}{a^2} = \frac{y_0^2}{b^2}$, és így

$$mn = -\frac{\frac{b^4}{y_0^2} \cdot \frac{y_0^2}{b^2}}{b^2} = -1.$$

Tehát tényleg F_1M és F_1N derékszöget zár be.

Természetesen teljesen hasonlóképpen bizonyítható tételünk F_2 -re nézve is.

Deseő Zoltán (Bp., X., I. László g. III. o. t.)



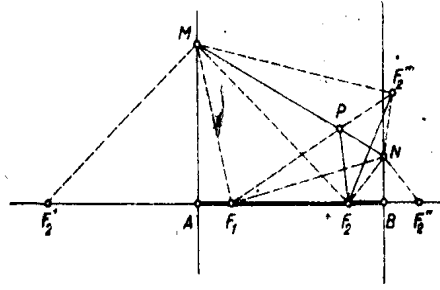
1. ábra

II. megoldás: A jelölést az 1. ábra mutatja. Az F_1 fókuszhoz a P pontban érintő MN egyenesre bocsátott merőleges talppontja T , amely rajta van az ellipszis főkörén. Tehát ATB derékszögű háromszög, amelynek derékszöge a T csúcsonál van. Ebből következik továbbá, hogy az $AFTM$ és $BFTN$ négyszögekben $2 - 2$ szembenfekvő szög: $\angle A \sphericalangle$ és $\angle T \sphericalangle$, ill. $\angle B \sphericalangle$ és $\angle T \sphericalangle$ derékszög, vagyis e négyszögek húrnégyszögek, s így az előbbiben az F_1T közös íven nyugvó $\angle F_1AT \sphericalangle$ és $\angle F_1MT \sphericalangle$, az utóbbiban pedig az $\angle F_1BT \sphericalangle$ és $\angle F_1NT \sphericalangle$ egyenlő. Ebből viszont következik, hogy az

$$MF_1N_{\Delta} \sim ATB_{\Delta},$$

vagyis az MF_1N derékszög.

Csáki Endre (Győr, Révai g.)



2. ábra

III. megoldás: A jelölést a 2. ábra mutatja. Legyen az F_2 fókusz tükörképe a két csúcsérintőre vonatkozóan F_2' és F_2'' , továbbá az MN érintőre nézve: F_2''' . A tükrözés miatt

$$NF_2'' = NF_2 = NF_2''',$$

és

$$F_1F_2'' = AB = F_1F_2''',$$

is így 3 oldal egyenlősége miatt

$$F_1NF_2''_{\triangle} \cong F_1NF_2'''_{\triangle},$$

amiből következik, hogy F_1N az $F_1F_2P_{\triangle}$ $F_1\angle$ -ének belső szögfelezője.

Hasonlóképpen a tükrözés alapján

$$MF_2' = MF_2 = MF_2''',$$

és

$$F_1F_2' = AB = F_1F_2''',$$

és így a 3 oldal egyenlősége miatt

$$MF_1F_2'_{\triangle} \cong MF_1F_2'''_{\triangle},$$

amiből következik, hogy F_1M az $F_1F_2P_{\triangle}$ $F_1\angle$ -ének külső szögfelezője, amely tudvalevőleg merőleges az F_1N belső szögfelezőre.

Schmidt Eligius (Bp., I., Fürst S. g. III. o. t.)