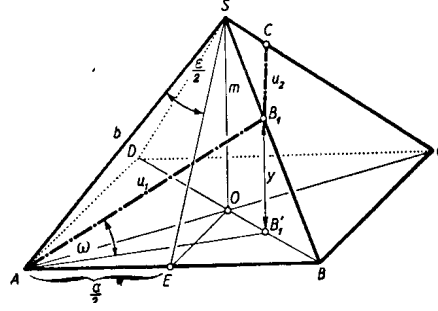


I. megoldás: A betűzést az ábra mutatja Számítsuk ki először az A_1 pontig megtett u utat, amely a következő négy szakaszból tevődik össze; $AB_1 = u$, $B_1C_1 = u_2$, $C_1D_1 = u_3$, és $D_1A_1 = u_4$.



Ha a gúla oldalélét b -vel és az S csúcspontnál lévő élszöveget ε -nal jelöljük, akkor az AB_1S derékszögű háromszögből

$$u_1 = b \sin \varepsilon, \quad \text{és} \quad SB_1 = b \cos \varepsilon.$$

Hasonlóképpen a B_1C_1S derékszögű háromszögből

$$u_2 = SB_1 \sin \varepsilon = b \cos \varepsilon \cdot \sin \varepsilon = u_1 \cos \varepsilon.$$

A B_1 , C_1 , D_1 pontokon áthaladó, az alaplappal párhuzamos (nívó-) síkok olyan részgúlákat metszenek le az eredeti piramisból, amelyek mind hasonlóak az eredeti gúlához. E hasonlóság alapján kimondhatjuk, hogy a 4 szakasz emelkedési szöge egyenlő, és továbbá $u_3 = u_2 \cos \varepsilon$ és $u_4 = u_3$, vagyis a 4 útszakasz mértani sort alkot, amelynek első tagja $u_1 = b \sin \varepsilon$, és hányadosa $\cos \varepsilon$. Tehát

$$(1) \quad u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = b \sin \varepsilon \frac{1 - \cos^4 \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} = b \sin \varepsilon (1 + \cos \varepsilon)(1 + \cos^2 \varepsilon).$$

Mivel $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, vagyis $AO^2 = \frac{a^2}{2}$, azért a piramis oldaléle

$$SA = b = \sqrt{m^2 + AO^2} = \sqrt{140^2 + \frac{231^2}{2}} = 215,1.$$

Az AES derékszögű háromszögből $\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{a}{2b} = \frac{231}{430,2}$, amiből

$$\frac{\varepsilon}{2} = 32^\circ 28', \quad \varepsilon = 64^\circ 56'.$$

Ezen értékeket (I)-be helyettesítve:

$$u = 215,1 \cdot \sin 64^\circ 56' \cdot 1,424 \cdot 1,180.$$

Az iskolai, 4-jegyű lg. táblával számolva az A_1 pontig megtett út

$$u \approx 327,4 \text{ méter.}$$

Az A_1 pont keresett magasságát x -szel, a B_1 pont B_1B' magasságát y -nal jelölve

$$(2) \quad x : u = y : u_1,$$

továbbá a BOS derékszögű háromszögben

$$(3) \quad y : m = B_1B : b,$$

ahol

$$B_1B = b - SB_1 = b - b \cos \varepsilon = b(1 - \cos \varepsilon) = 2b \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tehát (3)-ból

$$y = \frac{m \cdot B_1B}{b} = \frac{m \cdot 2b \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}}{b} = 2m \sin^2 \frac{\varepsilon}{2},$$

és így (2)-ből

$$\begin{aligned} x = \frac{uy}{u_1} &= \frac{u \cdot 2m \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}}{b \sin \varepsilon} = \frac{u \cdot 2m \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}}{b \cdot 2 \sin \frac{\varepsilon}{2} \cos \frac{\varepsilon}{2}} = \frac{um \sin \frac{\varepsilon}{2}}{b \cos \frac{\varepsilon}{2}} = \frac{um \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}}{b} = \\ &= \frac{327,4 \cdot 140 \cdot \operatorname{tg} 32^\circ 28'}{215,1}, \end{aligned}$$

ahonnan az A_1 pont keresett magassága

$$x \approx 135,6 \text{ méter.}$$

Az emelkedés szögét, a $B_1AB'_1$ -et ω -val jelölve

$$\sin \omega = \frac{y}{u_1} = \frac{x}{u} = \frac{135,6}{327,4},$$

ahonnan

$$\omega = 24^\circ 28'.$$

II. megoldás: A b és ε kiszámítása után kiszámíthatjuk először az A_1 pont x magasságát.

Ugyanis $x : m = AA_1 : b$, ahol $AA_1 = b - SA_1$, $SB_1 = b \cos \varepsilon$, $SC_1 = SB_1 \cos \varepsilon = b \cos^2 \varepsilon$, $SD_1 = SC_1 \cos \varepsilon = b \cos^3 \varepsilon$ és $SA_1 = b \cos^4 \varepsilon$.

Tehát

$$x = \frac{m \cdot AA_1}{b} = \frac{m(b - b \cos^4 \varepsilon)}{b} = m(1 - \cos^4 \varepsilon) (\approx 140 \cdot 0,9678 \approx 135,7)$$

Az I. megoldás szerint

$$u_1 = b \sin \varepsilon, \quad \text{és} \quad y = 2m \sin^2 \frac{\varepsilon}{2},$$

tehát

$$\sin \omega = \frac{y}{u_1} = \frac{2m \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}}{2b \sin \frac{\varepsilon}{2} \cos \frac{\varepsilon}{2}} = \frac{m \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}}{b} \left(\approx \frac{140 \operatorname{tg} 32^\circ 28'}{215,1} \right),$$

ahonnan

$$\omega = 24^\circ 28'.$$

Mivel $\sin \omega = \frac{x}{u}$, azért

$$u = \frac{x}{\sin \omega} \left(\approx \frac{135,7}{\sin 24^\circ 28'} = 327,6 \right).$$