

I. megoldás: Az egyenlet gyökei a feladat szerint $x_1, x_2 = -x_1$, és x_3 , és így gyöktényezősz alakja

$$(x - x_1)(x + x_1)(x - x_3) = (x^2 - x_1^2)(x - x_3) = x^3 - x_3x^2 - x_1^2x + x_1^2x_3 = 0$$

Az adott egyenlettel való összehasonlításból következik, hogy

$$x_3 = 5, \quad x_1^2 = 9,$$

és így

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -3.$$

Bárdos András (Bp. II., Rákóczi g. III. o. t.)

II. megoldás: Helyettesítsük az egyenletbe az egyenlő abszolút értékű, de különböző előjelű 2 gyököt

$$\begin{aligned}x_1^3 - 5x_1^2 - 9x_1 + 45 &= 0, \\ -x_1^3 - 5x_1^2 + 9x_1 + 45 &= 0.\end{aligned}$$

E két egyenletet összeadva

$$-10x_1^2 + 90 = 0,$$

amiből

$$x_1^2 = 9 \quad \text{és} \quad x_1 = 3, \quad x_2 = -3.$$

Az eredeti egyenlet több tagúját az $(x - 3)$ és $(x + 3)$ gyöktényezőik szorzatával, vagyis $(x^2 - 9)$ -cel elosztva

$$(x^3 - 5x^2 - 9x + 45) : (x^2 - 9) = x - 5.$$

Tehát $x - 5$ a harmadik gyöktényező, és így $x_3 = 5$.

Orlik Péter (Bp. V., Eötvös g. I. o. t.)

III. megoldás: Ha az egyenletnek vannak racionális gyökei, akkor ezek (mivel x^3 együtthatója 1) csak egész számok lehetnek, mégpedig 45 osztói. Mivel 2 gyök csak előjelben különbözik, azért 45-nek e gyök négyzetével is oszthatónak kell lennie. 45-nek 1-en kívül csak egy négyzetszám osztója van: 9. 1 nyilván nem gyöke egyenletünknek, de +3 és -3 igen. Ha két gyök racionális, akkor szükségképpen racionális a harmadik is, mivel pedig $45 = 3^2 \cdot 5$, azért a keresett harmadik gyök $x_3 = 5$.

Soós Klára (Aszód, Petőfi g. IV. o. t.)

IV. megoldás: Egyenletünk természetesen megoldható a feladatban megadott könnyítés felhasználása nélkül.

Ugyanis egyenletünk így írható:

$$x^2(x - 5) - 9(x - 5) = 0,$$

vagyis

$$(x - 5)(x^2 - 9) = 0,$$

amiből vagy

$$x^2 - 9 = 0,$$

vagy pedig

$$x - 5 = 0$$

és így

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = 5.$$

Lábas Elemér (Sátoraljaújhely, Kossuth g. II. o. t.)