

I. megoldás: A binomiális tétel szerint

$$(a+1)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1} + \binom{n}{2}a^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-2}a^2 + \binom{n}{n-1}a + 1.$$

A jobboldal első $n-1$ tagjából a^2 -et kiemelve és $\binom{n}{n-1} = n$ értéket írva

$$(a+1)^n = a^2 \left[a^{n-2} + \binom{n}{1}a^{n-3} + \dots + \binom{n}{n-2} \right] + na + 1 = a^2 A + an + 1.$$

Ezen értéket az adott kifejezésbe helyettesítve

$$\begin{aligned} (an-1)(a^2 A + an + 1) + 1 &= a^2 A(an-1) + a^2 n^2 - 1 + 1 = \\ &= a^2 [A(an-1) + n^2]. \end{aligned}$$

Az így nyert alakban bizonyítandó állításunk nyilvánvaló.

Csiszár Imre (Bp. I. Petőfi g. I. o. t.)

II. megoldás: Állításunkat teljes indukcióval igazoljuk. $n=1$ -re az állítás igaz mert $(a-1)(a+1) + 1 = a^2$. Tegyük fel, hogy $n=k$ -ra helyes, vagyis

$$(ak-1)(a+1)^k + 1 = a^2 A,$$

kimutatjuk, hogy akkor $n=(k+1)$ -re is igaz. Kifejezésünket a $n=(k+1)$ -re felírva és az alábbi átalakítást végezve

$$\begin{aligned} [a(k+1)-1](a+1)^{k+1} + 1 &= (ak-1+a)(a+1)^k(1+a) + 1 = \\ &= (ak-1)(a+1)^k + 1 + (ak-1)(a+1)^k a + a(a+1)^k(1+a) = \\ &= a^2 A + a(a+1)^k(ak-1+1+a) = a^2 A + a^2(a+1)^k(k+1) = \\ &= a^2 [A + (a+1)^k(k+1)] \end{aligned}$$

Tehát tényleg $n=(k+1)$ -re is igaz állításunk és így minden n -re igaz.

Schmidt Eligius (Bp. I. Fürst Sándor g. III. o. t.)