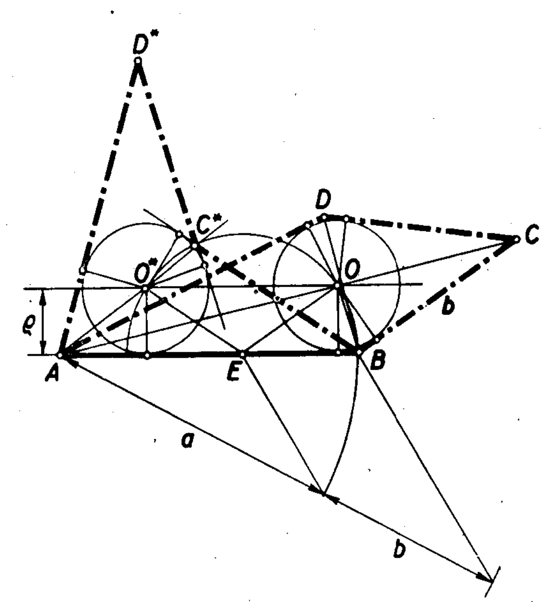
I. megoldás: Képzeljük a feladatot megoldottnak. A betűzést az 1. ábra mutatja.



1. ábra

Az $ABCD$ deltoidban húzzunk a beirt kör középpontján, O-n át párhuzamost a $BC=b$ oldallal. Messe ez a párhuzamos az $AB=a$ oldalt E-ben. A BO nyilván szögfelezője az $ABC\sphericalangle=\beta$ szögnek. Tehát $ABO\sphericalangle=OBC\sphericalangle=\frac{\beta}{2}$ de az $OBC\sphericalangle$, mint váltószög egyenlő $BOE\sphericalangle$-gel és így az $EBO_{\triangle}$ egyenlő szárú: $EB=EO$. Mivel $OE\parallel CB$, azért $AE:EB=AO:OC$. Az ismeretes szögfelezőtétel alapján azonban $AO:OC=a:b$, így tehát $AE:EB=a:b$. Ennek alapján az E pont egyszerű arányos osztással megszerkeszthető.

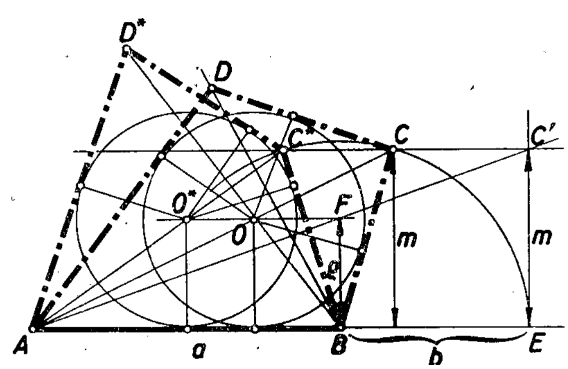
Az O pont mértani helye tehát, egyrészt az AB-vel húzott párhuzamos egyenes AB egyenestől ϱ távolságban, másrészt az E köré EB sugárral rajzolt kör.

Mivel $EB:a=b:(a+b)$, azért $EB=\frac{ab}{a+b}$, és így 2, 1, 0 megoldás van, aszerint, amint $EB=\frac{ab}{a+b}\gtreqless\varrho$.

Ábránkon a 2. megoldás konkáv (homorú) deltoid. Ilyenkor a beírt kör a homorú szöget ($C^*\sphericalangle>180^\circ$) bezáró oldalak meghosszabbítását érinti.

Pergel József (Bp. XIX., Landler Jenő g. IV. o. t.)

II. megoldás: A betűzést a 2. ábra mutatja.



2. ábra

A deltoid területe nyilván egyenlő az $ABC\triangle$ területének kétszeresével. Utóbbi pedig egyrészt $a\varrho+b\varrho$, másrészt am, ahol m az a oldalához tartozó magasság. Tehát

$$am=(a+b)\varrho,$$

vagyis

$$a:\varrho=(a+b):m,$$

és így m negyedik arányosként egyszerűen megszerkeszthető. m birtokában az adott a és b oldalakkal az $ABC_{\triangle}$ és így a deltoid szerkesztése is triviális.

A megoldások száma 2, 1, 0, aszerint, amint $m=\frac{(a+b)\varrho}{a} \lesseqgtr b$ vagyis $\varrho \lesseqgtr \frac{ab}{a+b}$.

A szerkesztés menete: Az $AB=a$ távolságot megtoldjuk a $BE=b$ szakasszal. A B pontban AB-re emelt merőlegesre felmérjük a $BF=\varrho$ távolságot. Az AF egyenes metszéspontja az E-ben AE-re emelt merőlegessel C'. $C'E:(a+b)=\varrho:a$, vagyis

$$C'E=\frac{(a+b)}{a}\varrho=m.$$

Bártfai Pál (Bp. I., Petőfi g. II. o. t.)