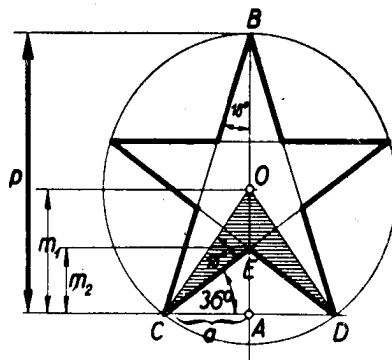


A betűzést az ábra mutatja.



Legyen az adott $AB = p$, $AC = AD = a$, $AO = m_1$, $AE = m_2$. Mivel $\angle AOC = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$, azért $\angle ABC = 18^\circ$, $\angle OCE = 18^\circ$, $\angle ACO = 54^\circ$, $\angle ACE = 54^\circ - 18^\circ = 36^\circ$.

Az ABC_Δ -ből $a = p \operatorname{tg} 18^\circ$,

az AOC_Δ -ből $m_1 = a \operatorname{tg} 54^\circ = p \operatorname{tg} 18^\circ \operatorname{tg} 54^\circ$,

az AEC_Δ -ből $m_2 = a \operatorname{tg} 36^\circ = p \operatorname{tg} 18^\circ \operatorname{tg} 36^\circ$.

A keresett T terület nyilván az $OCED$ deltoid területének (t) 5-szöröse. E deltoid területe pedig nem egyéb, mint a CDO_Δ területének (t_1) és a CDE_Δ területének (t_2) különbsége.

De

$$t_1 = a m_1 = p^2 \operatorname{tg}^2 18^\circ \operatorname{tg} 54^\circ,$$

$$t_2 = a m_2 = p^2 \operatorname{tg}^2 18^\circ \operatorname{tg} 36^\circ,$$

és így

$$(1) \quad T = 5t = 5(t_1 - t_2) = 5p^2 \operatorname{tg}^2 18^\circ (\operatorname{tg} 54^\circ - \operatorname{tg} 36^\circ).$$

De

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta},$$

és így

$$\operatorname{tg} 54^\circ - \operatorname{tg} 36^\circ = \frac{\sin 18^\circ}{\cos 54^\circ \cos 36^\circ} = \frac{2 \sin 28^\circ}{2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ} = \frac{2 \sin 18^\circ}{\sin 72^\circ} = \frac{2 \sin 18^\circ}{\cos 18^\circ} = 2 \operatorname{tg} 18^\circ.$$

Az itt nyert értéket (1)-be helyettesítve

$$T = 10p^2 \operatorname{tg}^3 18^\circ.$$

Ha a $BC = BD$ szakaszt egységnek vesszük, akkor CD nem egyéb, mint az az egységsugarú körbe írt szabályos 10-szög egy oldala, amely – mint ismeretes – $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Tehát $a = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ és így Pythagoras tétele alapján

$$p^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} \right)^2 = \frac{10+2\sqrt{5}}{16},$$

vagyis

$$p = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Ennélfogva

$$\operatorname{tg} 18^\circ = \frac{p}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5},$$

és így

$$\operatorname{tg}^3 18^\circ = \left(\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5} \right)^3 = \frac{\sqrt{85-38\sqrt{5}}}{5}.$$

Tehát

$$T = 10p^2 \operatorname{tg}^3 18^\circ = 2\sqrt{85-38\sqrt{5}} p^2 \approx 0,343 p^2.$$

Ez utóbbi eredményhez természetesen, a $\operatorname{tg} 18^\circ$ felhasználása nélkül, közvetlenül is juthatunk.

Csiszár Imre (Bp. I., Petőfi g. I. o. t.)

Edvi Illés Judit (Bp. XVI., Corvin Mátyás g. IV. o. t.)