

Legyen $\log x = u$ és $\log y = v$, akkor $x = 3^u$, $y = 3^v$ és így a két egyenlet:

$$\begin{aligned}(3^u)^u \cdot (3^v)^v &= 3^{u^2} \cdot 3^{v^2} = 3^{u^2+v^2} = 3^5, \\ (3^u)^v \cdot (3^v)^u &= 3^{uv} \cdot 3^{vu} = 3^{2uv} = 3^4.\end{aligned}$$

Ennélfogva

$$(1) \quad u^2 + v^2 = 5,$$

és

$$(2) \quad 2uv = 4.$$

(1) és (2) összege, illetőleg különbsége

$$(u+v)^2 = 9, \quad (u-v)^2 = 1,$$

vagyis

$$u+v = \pm 3, \quad u-v = \pm 1.$$

Ez 4 egyenletpart jelent, amelyeket megoldva:

$$\begin{aligned}u_1 = 2, \quad v_1 = 1; \quad u_2 = 1, \quad v_2 = 2; \\ u_3 = -2, \quad v_3 = -1; \quad u_4 = -1, \quad v_4 = -2;\end{aligned}$$

és így

$$\begin{aligned}u_1 = \log x_1 = 2, \quad \text{amiből } x_1 = 9, \quad v_1 = \log y_1 = 1, \quad \text{amiből } y_1 = 3, \\ u_2 = \log x_2 = 1, \quad \ll \quad x_2 = 3, \quad v_2 = \log y_2 = 2, \quad \ll \quad y_2 = 9, \\ u_3 = \log x_3 = -2, \quad \ll \quad x_3 = \frac{1}{9}, \quad v_3 = \log y_3 = -1, \quad \ll \quad y_3 = \frac{1}{3}, \\ u_4 = \log x_4 = -1, \quad \ll \quad x_4 = \frac{1}{3}, \quad v_4 = \log y_4 = -2, \quad \ll \quad y_4 = \frac{1}{9}.\end{aligned}$$

A gyökök összetartozását az indexek jelzik. A kapott értékeket az eredeti egyenletbe helyettesítve, ellenőrizhetjük a megoldás helyességét. A 4 gyökpár, a szimmetria miatt, tulajdonképpen csak 2 különböző párt jelent, amint az $-x$ és y felcserélhetősége miatt – várható is volt.

Babos Károly (Székesfehérvár, József Attila g. IV. o. t.)