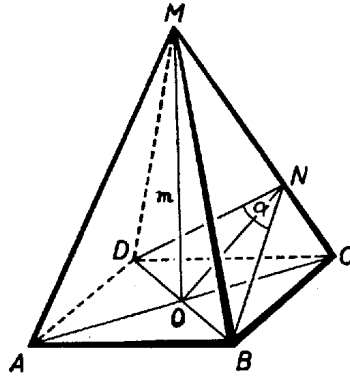


**I. megoldás:** A betűzést azt ábra mutatja.



Legyen a keresett magasság  $OM = m$ . Mivel a gúla szabályos, azért  $BD \perp MC$  és így lehet a  $BD$  átlón át síkot fektetni, amely merőleges az  $MC$  oldalélre. Messe ez a sík az  $MC$ -t  $N$ -ben, akkor  $BND_{\Delta}$  egyenlőszárú háromszög, melynek  $N$  szöge az adott  $\alpha$  szög.

Az  $MNO_{\Delta} \approx MOC_{\Delta}$ , mert e két háromszög derékszögű és az  $M$  közös, és így

$$m : ON = MC : OC,$$

amiből

$$(1) \quad m = \frac{ON \cdot MC}{OC}.$$

Mivel

$$(2) \quad OB = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad \text{azért} \quad ON = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cotg \frac{\alpha}{2}.$$

Pythagoras tétele alapján

$$(3) \quad MC = \sqrt{\frac{a^2}{2} + m^2},$$

és

$$(4) \quad OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

A (2), (3) és (4) alatti értékeket (1)-be helyettesítve

$$m = \sqrt{\frac{a^2}{2} + m^2} \cdot \cotg \frac{\alpha}{2},$$

vagyis

$$m^2 = \frac{a^2}{2} \cotg^2 \frac{\alpha}{2} + m^2 \cotg^2 \frac{\alpha}{2},$$

amiből

$$(5) \quad m = \frac{\sqrt{\frac{a^2 \cotg^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \left(1 - \cotg^2 \frac{\alpha}{2}\right)}}}{\sqrt{2 \cotg^2 \frac{\alpha}{2} - 2}} = \frac{a}{\sqrt{2 \cotg^2 \frac{\alpha}{2} - 2}}.$$

*Megjegyzés:* Az (5) alatti eredmény jobb oldala egyenértékű a következő kifejezésekkel:

$$\frac{a \cos \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2 \cos(180 - \alpha)}} = a \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{4 \cos(180 - \alpha)}} = \frac{a \cos \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2 - 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cotg \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)}$$

stb. stb. Ha mindezekbe a kifejezésekbe  $\alpha = 120^\circ$ -ot helyettesítünk, megkapjuk a Rákosi versenypéldában szereplő speciális  $m = \frac{a}{2}$  értéket.  $m$ -re csak akkor kapunk valós és véges értéket, ha  $90^\circ < \alpha$ . Az  $\alpha < 180^\circ$  felső határ az  $\alpha$  értelmezéséből adódik.

**II. megoldás:** Tekintsük a két gúlát, amelyeknek közös alapja a  $BND\triangle$  és magassága  $NM$  ill.  $NC$ . E két gúla köbtartalmának összege egyenlő az eredeti gúla köbtartalmának felével, azaz (a közös alap területét  $t$ -vel jelölve)

$$t \frac{NM}{3} + t \frac{NC}{3} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{m}{3},$$

ahonnan

$$t \cdot MC = \frac{a^2}{2} \cdot m.$$

Tehát

$$m = \frac{2t \cdot MC}{a^2} = \frac{a\sqrt{2} \cdot ON \cdot MC}{a^2} = \frac{ON \cdot MC \cdot \sqrt{2}}{a},$$

ami azonos az I. megoldás (1) alatti összefüggésével.