

I. megoldás.

$$2^{3n+6} + 2^{3n+2} = 2^6 \cdot (2^3)^n + 3^2 \cdot (3^4)^n = 64 \cdot 8^n + 9 \cdot 81^n = \\ = (73 - 9)8^n + 9 \cdot 81^n = 73 \cdot 8^n + 9(81^n - 8^n).$$

Az első tag oszthatósága nyilvánvaló. De a második tag is osztható, mert $a^n - b^n$ minden természetes n szám esetén osztható $(a - b)$ -vel, ezért $81^n - 8^n$ is osztható $81 - 8 = 73$ -mal és így tételünket bebizonyítottuk.

Tokaji Béla (Debrecen, Ép. ip. techn. IV. o. t.)

II. megoldás.

$$N = 2^{3n+6} + 3^{4n+2} = 64 \cdot 8^n + 9 \cdot 81^n = 73 \cdot 8^n - 9 \cdot 8^n + 9 \cdot (73 + 8)^n.$$

A binomiális tétel szerint

$$(73 + 8)^n = 73^n + \binom{n}{1} 73^{n-1} \cdot 8 + \dots + \binom{n}{n-1} 73 \cdot 8^{n-1} + 8^n = 73A + 8^n,$$

ahol A egész számot jelent.

Tehát

$$N = 73 \cdot 8^n - 9 \cdot 8^n + 9 \cdot 73A + 9 \cdot 8^n = 73(8^n + 9A).$$

Kálmán György (Szolnok, Beloiannis g. II. o. t.)

III. megoldás. Teljes indukcióval is bizonyíthatjuk tételünket.

$$n = 1\text{-re} \quad N = 2^9 + 3^6 = 512 + 729 = 1241 = 17 \cdot 73.$$

Tegyük fel, hogy $n = k$ -ra igaz állításunk, vagyis

$$2^{3k+6} + 3^{4k+2} = 73A,$$

ahol A egész szám, akkor $n = k + 1$ esetén

$$2^{3(k+1)+6} + 3^{4(k+1)+2} = 2^3 \cdot 2^{3k+6} + 3^4 \cdot 3^{4k+2} = 8 \cdot 2^{3k+6} + 81 \cdot 3^{4k+2} = \\ 8 \cdot 2^{3k+6} + (73 + 8)3^{4k+2} = 8(2^{3k+6} + 3^{4k+2}) + 73 \cdot 3^{4k+2} = \\ 8 \cdot 73A + 73 \cdot 3^{4k+2} = 73(8A + 3^{4k+2}).$$

Tehát ha k -ra igaz, akkor $(k + 1)$ -re is igaz, de $k = 1$ -re – mint láttuk – igaz és így minden természetes n számra igaz.

Csonka Pál (Bp. XI., József Attila g. IV. o. t.)