

I. megoldás: A fizikából ismeretes, hogy a parabolapálya csúcspontjának koordinátái

$$(1) \quad x = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{2q},$$

$$(2) \quad y = \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

A legmagasabb az emelkedés, ha $\alpha = 90^\circ$, amikor is $y_{\max} = \frac{c^2}{2g}$. Ezen érték helyett az egyszerűség kedvéért $2m$ -et írva, az (1) és (2) alatti egyenletek a következő alakot veszik fel:

$$(3) \quad x = 2m \sin 2\alpha,$$

$$(4) \quad y = 2m \sin^2 \alpha.$$

A mértani hely egyenletét megkapjuk, ha a tetszőleges értéket felvevő α paramétert kiküszöböljük. Mivel $2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$, azért a (4) alatti egyenlet

$$y = m(1 - \cos 2\alpha) = m - m \cos 2\alpha,$$

amiből

$$(5) \quad \cos^2 2\alpha = \frac{(y-m)^2}{m^2},$$

(3)-ból

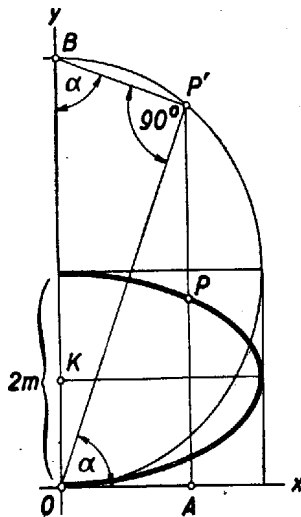
$$(6) \quad \sin^2 2\alpha = \frac{x^2}{(2m)^2}.$$

(5) és (6)-ot összeadva és az egyenlet két oldalát felcserélve

$$\frac{x^2}{(2m)^2} + \frac{(y-m)^2}{m^2} = 1.$$

Ez egy olyan ellipszis egyenlete, melynek középpontja $K(0, m)$, nagy tengelye párhuzamos az abszcissza tengellyel és a fél nagy tengely hossza $2m$, az ordináta tengelyre eső kis tengely fele: m . Ezen adatokból az is kitűnik, hogy az ellipszis érinti az origóban az x tengelyt. Ebből az ellipszisből a *keresett mértani helynek* $-0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ feltétel miatt – csak az y tengelytől jobbra eső fél ellipszis felel meg. $m = \frac{c^2}{4g}$, vagyis ha g -t állandónak tekintjük, akkor m csak a c -től függ. m változásával az ellipszisek csak nagyságra változnak, egymás között mind hasonlóak.

II. megoldás: Legyen P ($4m \sin \alpha \cos \alpha$, $2m \sin^2 \alpha$) a mértani hely egy pontja, ahol $2m = \frac{c^2}{2g} = y_{\max}$. Vizsgáljuk meg azon P' pontok geometriai helyét, amelyeket a P pontok ordinátáinak megkettőzésével nyerünk. (L. ábrát, amely a betűzést is mutatja.)



Tehát P' koordinátái: $4m \sin \alpha \cos \alpha$, $4m \sin^2 \alpha$.

Az OP' irántangense $= \frac{4m \sin^2 \alpha}{4m \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$, vagyis OP' az x tengellyel a hajítás szögét zárja be.

P' -ben az OP' -re bocsátott merőleges merőleges messe az y tengelyt egy B pontban. A merőleges szárú szögpárok tétele alapján $P'BO \sphericalangle = \alpha$.

Pythagoras-tétele alapján

$$\begin{aligned} OP' &= \sqrt{AP'^2 + AO^2} = \sqrt{16m^2 \sin^4 \alpha + 16m^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \\ &= \sqrt{16m^2 \sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} = 4m \sin \alpha, \end{aligned}$$

és így $OB = \frac{OP'}{\sin \alpha} = 4m$, α -tól független állandó.

A P' pontok mértani helye tehát az $OB = 4m$ fölé rajzolt Thales-körnek az y tengelytől jobbra eső fele.

E kör egyenlete

$$x^2 + (y - 2m)^2 = (2m)^2.$$

A P pontok keresett mértani helye pedig e félkör pontjaihoz tartozó ordináták felezőpontjai.

E felező pontok mértani helye tehát

$$x^2 + (2y - 2m)^2 = (2m)^2,$$

vagyis

$$\frac{x^2}{(2m)^2} + \frac{(y - m)^2}{m^2} = 1, \quad \text{ahol } x \geq 0.$$

Ez a fél ellipszis a félkörnek az y tengely irányában $\lambda = \frac{1}{2}$ arányban való »összenyomása« által keletkezett. (Lásd ált. gimnáziumok IV. oszt. tankönyvében: Függvény transzformációk 4. pontja, 43–44. oldal.)

Schmidt Eligius (Bp. I., Fürst S. g. II. o. t.)