

I. megoldás: A kör egyenlete így is írható:

$$(x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 16,$$

amiből a kör középpontja $O(5, 6)$ és sugara $r = 4$.

A kör középpontján átmenő és az adott $y = 3x$ egyenesre merőleges egyenes:

$$(1) \quad y - 6 = -\frac{1}{3}(x - 5)$$

metszi ki a körvonalból az érintési pontokat.

(1)-ből

$$x = 23 - 3y,$$

amely értéket a kör egyenletébe helyettesítve

$$(18 - 3y)^2 + (y - 6)^2 = 16,$$

vagyis

$$10y^2 - 120y + 344 = 0,$$

amiből

$$y_{1,2} = 6 \pm \frac{2}{5}\sqrt{10},$$

és így

$$x_{1,2} = 23 - 18 \mp \frac{6}{5}\sqrt{10} = 5 \mp \frac{6}{5}\sqrt{10}.$$

Tehát az érintési pontok:

$$E_1 \left(5 - \frac{6}{5}\sqrt{10}, 6 + \frac{2}{5}\sqrt{10} \right) \quad \text{és} \quad E_2 \left(5 + \frac{6}{5}\sqrt{10}, 6 - \frac{2}{5}\sqrt{10} \right).$$

Az E_1 ponton átmenő és az adott egyenessel párhuzamos egyenes egyenlete:

$$y - 6 - \frac{2}{5}\sqrt{10} = 3 \left(x - 5 + \frac{6}{5}\sqrt{10} \right),$$

amiből

$$y = 3x - 9 + 4\sqrt{10}.$$

Hasonlóképpen nyerjük az E_2 -n átmenő érintőt:

$$y = 3x - 9 - 4\sqrt{10}.$$

Klofszky Emil (Győr, Révai g. III. o. t.)

II. megoldás: Legyen az érintő egyenlete $y = mx + b$. A párhuzamosság miatt $m = 3$. Az $y = 3x + b$ egyenes akkor érinti a kört, ha két egybeeső pontban metszi, vagyis ha y értékét behelyettesítjük a kör egyenletébe:

$$(1) \quad x^2 + (3x + b)^2 - 10x - 12(3x + b) + 45 = 0,$$

az így nyert, x -re nézve, másodfokú egyenletnek diszkriminánsa 0.

Az (1) alatti egyenletet rendezve

$$10x^2 + (6b - 46)x + (b^2 - 12b + 45) = 0.$$

A diszkrimináns:

$$(6b - 46)^2 - 40(b^2 - 12b + 45) = 0,$$

vagyis

$$b^2 + 18b - 79 = 0,$$

amiből

$$b_{1,2} = -9 \pm 4\sqrt{10}.$$

Tehát az érintők egyenletei:

$$y = 3x - 9 + 4\sqrt{10},$$

$$y = 3x - 9 - 4\sqrt{10}.$$

III. megoldás: Az $y = 3x + b$ egyenes normál alakja

$$\frac{3x - y + b}{\pm\sqrt{10}} = 0,$$

b -t úgy kell megválasztani, hogy ennek az egyenesnek az $O(5, 6)$ ponttól való távolság 4 legyen, vagyis

$$\frac{15 - 6 + b}{\pm\sqrt{10}} = 4,$$

amiből

$$b_{1,2} = -9 \pm 4\sqrt{10},$$

és így az érintők egyenlete:

$$y = 3x - 9 + 4\sqrt{10},$$

és

$$y = 3x - 9 - 4\sqrt{10}.$$