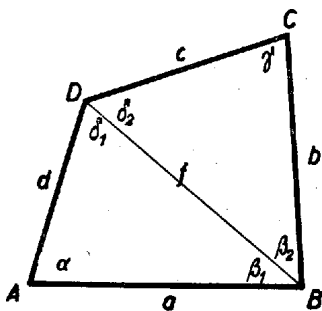


A betűzést az ábra mutatja.



A $BD = f$ átlót a cosinus-tétellel egyrészt az ABD_{Δ} -ből, másrészt a BCD_{Δ} -ből kifejezve:

$$f = a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha = b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma,$$

amiből

$$(1) \quad \cos \gamma = \frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2 + 2ad \cos \alpha}{2bc}.$$

Az oldalakat rendre egy x arányossági tényezővel kifejezve:

$$a = 9x, \quad b = 8x, \quad c = 7x, \quad d = 6x.$$

Ezen értékeket (1)-be helyettesítve

$$\cos \gamma = \frac{64x^2 + 49x^2 - 81x^2 - 36x^2 + 108x^2 \cos \alpha}{112x^2} = \frac{27 \cos \alpha - 1}{28} = \frac{7,086}{28},$$

amiből

$$\gamma = 75^{\circ}22'.$$

(γ másik értéke: $284^{\circ}38'$ jelen esetben hurkolt négyszöghöz vezet.)

A négyszög kétszeres területe:

$$ad \sin \alpha + bc \sin \gamma = 450,$$

vagyis

$$54x^2 \sin \alpha + 56x^2 \sin \gamma = 450,$$

amiből

$$x^2 = \frac{450}{54 \sin 72^{\circ}36' + 56 \sin 75^{\circ}22'} = \frac{450}{105,72},$$

és így

$$x = 2,063.$$

Ennélfogva

$$a = 18,567 \text{ cm}, \quad b = 16,504 \text{ cm}, \quad c = 14,441 \text{ cm} \quad \text{és} \quad d = 12,378 \text{ cm}.$$

A még hiányzó két szög kiszámítását megoldóink túlnyomó része – tangens-tétel hiányában – úgy végezték, hogy az a , d és α adatokból a kellemetlen cosinus-tétellel (főleg akkor kellemetlen, ha nem ismerjük a logaritmus használatra alkalmas alakját) kiszámították az f átlót és ezután a sinus-tétel kétszeri alkalmazásával a β_1 és β_2 szögeket.

A tangens-tétellel az f átló fáradságos kiszámítását megtakaríthatjuk és közvetlenül kiszámíthatjuk a β_1 és δ_1 valamint β_2 és δ_2 szögeket. A tangens-tétel a sinus-tételből rövid úton levezethető:

$$a : b = \sin \alpha : \sin \beta,$$

amiből

$$(a + b) : (a - b) = (\sin \alpha + \sin \beta) : (\sin \alpha - \sin \beta),$$

vagyis

$$(2) \quad \frac{a + b}{a - b} = \frac{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}.$$

Ezzel már meg is van a tangens-tétel.

Mivel $\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{180^\circ - \gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$ és $\operatorname{tg}\left(90 - \frac{\gamma}{2}\right) = \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$,
azért (2)-ből

$$(3) \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{(a - b)\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}}{a + b},$$

A (3) alatti képletet az ABD_Δ -re alkalmazva

$$\operatorname{tg}\frac{\delta_1 - \beta_1}{2} = \frac{(a - d)\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}}{a + d} = \frac{6,189 \operatorname{cotg} 36^\circ 18'}{30,945},$$

amiből

$$\frac{\delta_1 - \beta_1}{2} = 15^\circ 15',$$

vagyis

$$(4) \quad \delta_1 - \beta_1 = 30^\circ 30'.$$

Másrészt

$$(5) \quad \delta_1 + \beta_1 = 180^\circ - \alpha = 107^\circ 24',$$

és így (4) és (5)-ből

$$\delta_1 = 68^\circ 57' \quad \text{és} \quad \beta_1 = 38^\circ 27'.$$

Hasonlóképpen a BCD_Δ -ből

$$\operatorname{tg}\frac{\delta_2 - \beta_2}{2} = \frac{(b - c)\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}}{b + c} = \frac{2,063 \operatorname{cotg} 37^\circ 41'}{30,945},$$

amiből

$$\frac{\delta_2 - \beta_2}{2} = 4^\circ 56',$$

vagyis

$$\delta_2 - \beta_2 = 9^\circ 52',$$

és mivel

$$\delta_2 + \beta_2 = 180^\circ - \gamma = 104^\circ 38',$$

azért

$$\delta_2 = 57^\circ 15' \quad \text{és} \quad \beta_2 = 47^\circ 23'.$$

Tehát

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 = 85^\circ 50',$$

és

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 126^\circ 12'.$$

Rockenbauer Magda (Bp. X., I. László g. III.)