

**I. megoldás:** Mivel  $\alpha$  hegyesszög, azért egyenlőtlenségünk mindkét oldala pozitív, tehát négyzetre emelhető, vagyis elegendő a következő egyenlőtlenséget igazolni:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha \leq 2.$$

De

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$$

és így

$$\sin 2\alpha \leq 1,$$

ami nyilván igaz. Az egyenlőségi jel akkor érvényes, ha  $\alpha = 45^\circ$ .

Marik Miklós (Bp. I., Fürst S. g. II. o. t.)

## II. megoldás:

Az  $\alpha$  hegyesszög mindig ilyen alakban írható

$$\alpha = 45^\circ \pm \beta, \quad \text{ahol} \quad 0 \leq \beta < 45^\circ.$$

Tehát

$$(1) \quad \sin \alpha = \sin 45^\circ \cos \beta \pm \cos 45^\circ \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \beta \pm \sin \beta)$$

$$(2) \quad \cos \alpha = \cos 45^\circ \cos \beta \mp \sin 45^\circ \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \beta \mp \sin \beta)$$

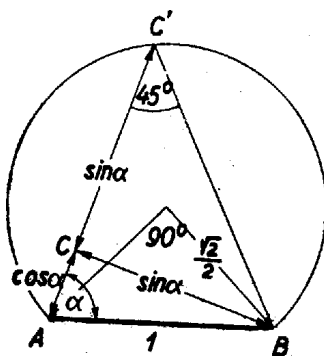
(1) és (2) összege:

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cos \beta$$

Tehát  $\sin \alpha + \cos \alpha$  lehető legnagyobb értéke  $\sqrt{2}$ , midőn  $\cos \beta = 1$ , vagyis  $\beta = 0^\circ$  és így  $\alpha = 45^\circ$ .

Zawadowski Alfréd (Bp. I., Petőfi g. III. o. t.)

**III. megoldás:** Vegyünk fel egy  $AB = 1$  szakaszt és rajzoljuk meg azt a körívet, amelynek pontjaiból az  $AB$  távolság  $45^\circ$  alatt látszik. (1. ábra.)



1. ábra

Mivel a középponti szög  $90^\circ$ , azért a látókörív sugara  $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot AB$  fölé  $ABC$  derékszögű háromszöget szerkesztve, melynek  $A$ -nál levő szöge *tetszőleges*  $\alpha$ , akkor  $AC = \cos \alpha$  és  $BC = \sin \alpha$ . Messe az  $AC$  befogó meghosszabbítása a látókörívet  $C'$  pontban, akkor a keletkezett  $BCC'$  derékszögű háromszög egyenlő szárú, mert  $C' \angle = 45^\circ$ , vagyis  $CC' = CB = \sin \alpha$ . Tehát  $AC' = \sin \alpha + \cos \alpha$ . Ha  $\alpha$  változik, az  $AC'$  húr is változik, de mindig kisebb marad az átmérőnél,  $\sqrt{2}$ -nél. A legnagyobb értéket  $\sin \alpha + \cos \alpha = AC'$  akkor éri el, ha  $AC'$  átmérő, vagyis  $AC' = \sqrt{2}$  és ez esetben  $\alpha = 45^\circ$ . (Az 1. ábrából még leolvasható, hogy ha  $\alpha$  hegyesszög, akkor  $AC' = \sin \alpha + \cos \alpha$  minimális értéke 1, midőn  $\alpha = 90^\circ$ .)

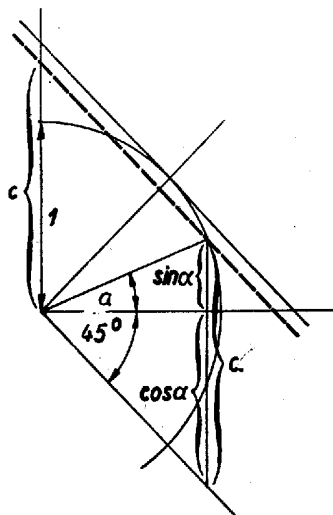
Vigassy József (Bp. I., Petőfi g. II. o. t.)

## IV. megoldás:

Próbáljuk grafikusan megoldani a

$$\sin \alpha + \cos \alpha = c$$

egyenletet, ahol  $c$  megadott konstans érték. (2. ábra) A  $c$ -hez tartozó  $\alpha$  szöget úgy nyerjük, hogy a »-45°-os« szög mozgó szárát önmagával párhuzamosan eltoljuk  $c$  távolsággal.



2. ábra

Az eltolt egyenes (ábránkon vonalkázva), általában 2 pontban metszi a negyedkört, tehát 2 megoldást kapunk  $\alpha$ -ra. A  $c$ -t változónak tekintve,  $\alpha$ -ra hegyesszögű megoldás a  $c$  változónak csak bizonyos intervallumában van:  $c$  legkisebb értéke 1, mikor is  $\alpha_1 = 0^\circ$  és  $\alpha_2 = 90^\circ$  és legnagyobb értéke pedig midőn  $\alpha_1 = \alpha_2 = 45^\circ$ , vagyis az eltolt egyenes érinti a negyedkört. Ez esetben  $c = \sqrt{2}$ . Tehát ha  $\alpha$  hegyesszög

$$1 \leq \sin \alpha + \cos \alpha \leq \sqrt{2}.$$

*Megjegyzés:* Ha elejtjük azt a követelményt, hogy a hegyesszög, akkor ábránkból rögtön látható, hogy

$$-\sqrt{2} \leq c \leq \sqrt{2}$$

esetén van megoldás.

Kovács László (Debrecen, Ref. g. II. o. t.)