

a) **I. megoldás:** 14 lépés esetén a bástya mindig csak a szomszédos mezőre léphet – jobbra, vízszintes irányban, vagy előre függőleges irányban, mert $a1$ -től $h8$ -ig összesen 7–7 egységlépést kell tennie mindkét irányban. Ha a vízszintes lépést a -val és a függőleges lépést b -vel jelképezzük; akkor egy tetszőlegesen kiragadott utat például így jelezhetünk: $abbabaabbbbaaba$. Tehát minden útnak az $aaaaaaaaabbbbbbb$ elemeknek egy permutációja felel meg és megfordítva: az említett permutációk mindegyikének egy út.

Ezek szerint az összes lehetséges utak száma (14 lépésben):

$$P_{14}^{7,7} = \frac{14!}{7!7!} = 3432$$

Marik Miklós (Bp. I., Fürst S. g. II. o. t.)

II. megoldás: Minden mezőbe írjuk be az összes arra vezető utak számát előlről kezdve folytatólagosan. Ez utóbbi számot nyilván úgy kapjuk meg, ha összeadjuk abba a két mezőbe írt számot, amely két mezőről az illető mezőre léphettünk. (1. ábra)

VIII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	
VI	1	8	36	120	330	792	1716	3432
V	1	7	28	84	210	462	924	1716
IV	1	6	21	56	126	252	416	792
III	1	5	15	35	70	126	210	330
II	1	4	10	20	35	56	84	120
I	1	3	6	10	15	21	28	36
	1	2	3	4	5	6	7	8
		1	1	1	1	1	1	1

1. ábra

Kiindulás: $b1$ - és $a2$ -be 1-et írunk s. i. t. a fenti szabály szerint. Ennek alapján a beírt számok olyan Pascal-féle háromszöget alkotnak, amelynek az $a1$ mező a csúcsa és melyben az $a2 - b1$, $a3 - c1$, $a4 - d1$, $a5 - e1$ stb. átlók a sorai. A $h8$ mezőbe tehát a 14. sor 8-ik tagja kerül:

$$\binom{14}{7} = 3432$$

(L. lapunk III. évf. 325. sz. feladatát a 230. oldalon).

Németh László (Gyula, Erkel F. g. IV. o. t.)

III. megoldás: Az $a8 - h1$ átló egyes mezeire a bástya $a1$ -ből kiindulva feltételünknek megfelelően $\binom{7}{0}$, $\binom{7}{1}$, $\binom{7}{2}$, $\binom{7}{3}$... $\binom{7}{6}$, $\binom{7}{7}$ -féleképpen juthat el (L. előbbi megoldást és 1. ábrát.) Minden egyes mezőről a bástya nyilván ugyanannyiféleképpen mehet el $h8$ -ra, ahányféleképpen eljutott az $a8 - h1$ átló illető mezejére. Tehát az összes lehetséges utak száma

$$\begin{aligned} & \binom{7}{0}^2 + \binom{7}{1}^2 + \binom{7}{2}^2 + \dots + \binom{7}{6}^2 + \binom{7}{7}^2 = \\ & = 2(1^2 + 7^2 + 21^2 + 35^2) = 2 \cdot 1716 = 3432. \end{aligned}$$

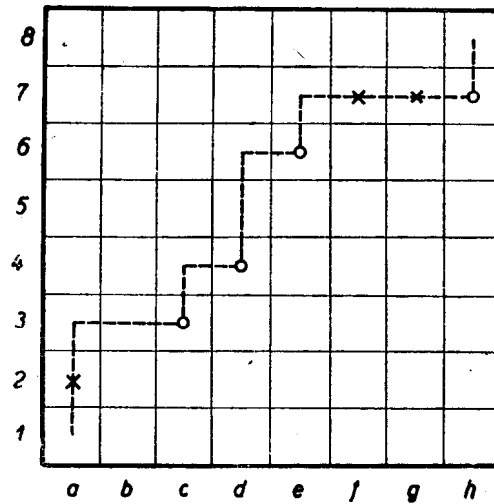
Ennek a megoldásnak az az előnye, hogy egyszersmind megadja az $a8 - h1$ átló minden egyes mezejére nézve külön-külön az illető mezőn átvonuló utak számát. Pl. $f3$ -on $\binom{7}{5}^2 = \binom{7}{2}^2 = 21^2 = 441$ út vonul át.

Tahy Péter (Bp. II., Rákóczi g. II. o. t.)

IV. megoldás: Állapítsuk meg egy tetszőleges n lépésszámra érvényes képletet, ahol n – az értelmezésből kifolyólag – természetes szám, melyre nézve $2 \leq n \leq 14$.

Először is nyilvánvaló, hogy elég azokat az utakat megszámlálni, amelyekben az első lépés függőleges, mert ezen utaknak az $a1 - h8$ átlóra vonatkozó tükröképei szolgáltatják a vízszintes kezdőlépésű utakat és fordítva. Tehát az összes utak száma: az előbbi kikötés mellett megszámlált utak kétszerese.

Mivel az utolsó lépés *mindig* $h8$ -ra történik, ezért pl. valamely 12 lépéses út jelölésére elég azt a 11 mezőt megadni, amely mezőkön egy-egy lépés végződik. Valamely tetszőleges 12 lépéses utat pl. a következő 11 lépésvégponttal jelölhetünk a sakktábla mezeinek szokásos jelölését használva: $a2 - a3 - c3 - c4 - d4 - d6 - e6 - e7 - f7 - g7 - h7$. (2. ábra.)



2. ábra

A lépésvégpontok lehetnek olyan pontok, amelyekben irányváltás történik és olyanok amelyekben nem történik irányváltás. Ez előbbieket nevezzük *töréspont*oknak. Ezeknek számát k -val jelölve, n lépés esetén $1 \leq k \leq n - 1$. Az utóbbiakat nevezzük *megálló*-nak. Ezeknek számát nyilvánvalóan megkapjuk, ha az $n - 1$ lépés-végpontból a töréspontok számát levonjuk: $n - 1 - k$. (Ha $k = n - 1$, akkor nincs megálló). A fenti példában 8 töréspontot találunk: $a3, c3, c4, d4, d6, e6, e7, h7$ és $11 - 8 = 3$ megállót: $a2, f7$ és $g7$. (Az ábrában fekvő kereszttel jelölve).

A töréspontok teljesen meghatározzák az útvonalat (nem az utat, mert az út ismeretéhez még a megállók ismerete is szükséges), sőt elég pl. a vízszintes lépések végpontjainál lévő $\frac{8}{2} = 4$ töréspontot megadni (az ábrában nullkörrel jelölve), hogy az útvonal meg legyen határozva. Ezek szerint a fenti 12 lépéses út (függőleges indulást feltételezve) megadható a következő szimbólumokkal

$$c3, d4, e6, h7; a2, f7, g7.$$

Mivel a töréspontok száma jelen példában *páros*, azért az utolsó, vízszintes lépés végpontjában lévő töréspont, *szükségképpen mindig* a h oszlopba kerül és így » $h7$ « helyett elég 7-et írni.

Tehát a

$$c3, d4, e6, h7; a2, f7, g7$$

szimbólumok teljesen megadják a fenti 12 lépéses utat, mégpedig a pontosvessző előtt álló szimbólumok meghatározzák az *útvonalat*, a pontosvessző után álló jelek pedig a *megállók*at adják meg.

Az útvonalat részben megadó c, d, e szimbólumok nem egyebek, mint a b, c, d, e, f, g elemeknek egy harmad osztályú kombinációja, az útvonalat másik részben megadó 3, 4, 6, 7 elemek pedig nem egyebek, mint a 2, 3, 4, 5, 6, 7 elemeknek egy negyed osztályú kombinációja.

Minden útvonal – a kezdőpontot és végpontot nem számítva – kivétel nélkül 13 mezőn halad át, tehát ha 13-ból levonjuk a töréspontok számát (k ; jelen példánkban $k = 8$), akkor a fennmaradó $13 - k$, jelen esetben $13 - 8 = 5$ mezőn helyezkedhet el az $(n - 1 - k)$ számú, jelen esetben $11 - 8 = 3$ megálló. Tehát a megállók megadó 3 mező: $a2, f7, g7$ nem egyéb, mint az $a2, b3, d5, f7, g7$ öt mezőnek egy harmadosztályú kombinációja.

Mivel az itt szereplő 3 fajta kombinációs csoport mindegyikének bármely kombinációja kapcsolható egy másik kombinációs csoport bármely kombinációjával, azért az összes lehetséges utak számát megkapjuk, ha a 3 fajta kombinációknak számát összeszorozzuk.

Ezek szerint tehát a 12 lépéses és 8 törésponttal bíró utak száma

$$U_{12,8} = 2 \cdot \binom{6}{3} \binom{6}{4} \binom{5}{3} = 2 \cdot \binom{6}{\frac{8-2}{2}} \binom{6}{\frac{8}{2}} \binom{13-8}{11-8}$$

Általában, ha a lépés szám n és a töréspontok száma k *páros* ($2 \leq k \leq n - 1$), akkor

$$U_{n,k} = 2 \cdot \binom{6}{\frac{k-2}{2}} \binom{6}{\frac{k}{2}} \binom{13-k}{n-k-1}.$$

Ha a töréspontok száma *páratlan* ($1 \leq k \leq n-1$), akkor az utolsó töréspont (továbbra is függőleges kezdőlépést feltételezve) szükségképpen mindig egy függőleges lépés végpontja a 8. sorban. A függőleges lépések végpontjaiban lévő töréspontok száma tehát $\frac{k+1}{2}$ a vízszintes lépések végén lévő töréspontok száma pedig $\frac{k-1}{2}$. Ez utóbbiakat megadó szimbólumok egyrészt a

$$b, c, d, e, f, g$$

elemeknek, másrészt a

$$2, 3, 4, 5, 6, 7$$

elemeknek egy $\frac{k-1}{2}$ -ed osztálya kombinációja. Vagyis *páratlan* k esetén

$$U_{n,k} = 2 \cdot \binom{6}{\frac{k-1}{2}}^2 \binom{13-k}{n-k-1}.$$

A nyert két képlet egyesíthető a $[x]$ jelölés bevezetésével (olvasd: x egész része« v. entier [antjé] x), amely az x -ben foglalt legnagyobb *egész* számot jelenti.

Ugyanis, ha k *páros*, akkor

$$\frac{k-2}{2} = \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor \quad \text{és} \quad \frac{k}{2} = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor,$$

ha pedig k *páratlan*, akkor

$$\frac{k-1}{2} = \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor,$$

és így

$$U_{n,k} = 2 \cdot \binom{6}{\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} \binom{6}{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} \binom{13-k}{n-k-1},$$

ahol $n = 2, 3, \dots, 14$ és $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Az összes n lépéses utak számát, U_n -et megkapjuk, ha rendre kiszámítjuk az utak számát $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$ töréspont esetén és az így nyert eredményeket összeadjuk. Tehát

$$U_n = 2 \sum_{k=1}^{n-1} \binom{6}{\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} \binom{6}{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} \binom{13-k}{n-k-1}.$$

Képletünket jelen esetre alkalmazva, amidőn $n = 14$

$$U_{14} = 2 \sum_{k=1}^{13} \binom{6}{\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} \binom{6}{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} \binom{13-k}{13-k},$$

vagyis

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} U_{14} &= \binom{6}{0}^2 + \binom{6}{0} \binom{6}{1} + \binom{6}{1}^2 + \binom{6}{1} \binom{6}{2} + \binom{6}{2}^2 + \binom{6}{2} \binom{6}{3} + \binom{6}{3}^2 + \binom{6}{3} \binom{6}{4} + \\ &+ \binom{6}{4}^2 + \binom{6}{4} \binom{6}{5} + \binom{6}{5}^2 + \binom{6}{5} \binom{6}{6} + \binom{6}{6}^2 = 2(1 + 6 + 36 + 90 + 225 + 300) + 400 = 1716, \end{aligned}$$

és így

$$U_{14} = 2 \cdot 1716 = 3432.$$

Dömölki Bálint (Bp. IX., Apácai Csere János g. III. o. t.)

b) I. megoldás: Ha 12 lépésben akarunk h8-ra jutni, akkor vagy kétszer kell 2 egységnyit lépni, vagy egyszer 3 egységnyit. Ha az utóbbi lépéseket a_2, b_2 illetőleg a_3, b_3 -mal jelöljük, akkor a következő elemek permutációjáról van szó:

a	a	a	a ₂	a ₂			b	b	b	b	b	b	b
a	a	a	a	a ₃			b	b	b	b	b	b	b
a	a	a	a	a	a ₂		b	b	b	b	b	b ₂	
a	a	a	a	a	a	a	b	b	b	b	b ₃		
a	a	a	a	a	a	a	b	b	b	b ₂	b ₂		

Tehát

$$U_{12} = 2P_{12}^{2,3,7} + P_{12}^{4,7} + P_{12}^{5,5} = 2 \cdot \frac{12!}{2! 3! 7!} + 2 \cdot \frac{12!}{4! 7!} + \frac{12!}{5! 5!} = 57\,024.$$

Deseő Zoltán (Bp. X., I. László g. II. o. t.)

II. megoldás: Alkalmazzuk az a) IV. megoldásánál nyert képletet:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}U_{11} &= \sum_{k=1}^{11} \binom{6}{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \binom{6}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{13-k}{11-k} = \\ &= \binom{12}{10} + 6 \binom{11}{9} + 36 \binom{10}{8} + 90 \binom{9}{7} + 225 \binom{8}{6} + 300 \binom{7}{5} + 400 \binom{6}{4} + 300 \binom{5}{3} + \\ &\quad + 225 \binom{4}{2} + 90 \binom{3}{1} + 36 \binom{2}{0} = 66 + 330 + 1620 + 3240 + 6300 + 6300 + 6000 + \\ &\quad + 3000 + 1350 + 270 + 36 = 28\,512, \end{aligned}$$

amiből

$$U_{12} = 57\,024.$$

c) **I. megoldás:**

Egy irányban 2 lépést a másik irányban 3 lépést megtéve az

$$\begin{array}{ll} a & a_6 & b & b & b_5 \\ a_2 & a_5 & b & b_2 & b_4 \\ a_3 & a_4 & b & b_3 & b_3 \\ & & b_2 & b_2 & b_3 \end{array}$$

esetek lehetségesek.

Az első csoport minden sorát a második csoport minden sorával összekapcsolva és az így nyert 5 elemet esetről-esetre permutálva $3P_5 + 9P_5^2$ számú utat kapunk, amely számot $-a$ és b felcserélhetősége miatt $-$ még 2-vel meg kell szorozni. Tehát ez esetben az utak száma $6P_5 + 18P_5^2$.

Egy irányban 1 lépést a másik irányban 4 lépést megtéve az

$$\begin{array}{ll} a_7 & b & b & b & b_4 \\ & b & b & b_2 & b_3 \\ & b & b_2 & b_2 & b_2 \end{array}$$

esetek lehetségesek.

Az utak száma ez esetben $2(P_5^2 + 2P_5^3) = 2P_5^2 + 4P_5^3$.

Tehát az összes utak száma

$$\begin{aligned} U_5 &= 6P_5 + 20P_5^2 + 4P_5^3 = 6 \cdot 51 + 20 \cdot \frac{5!}{2!} + 4 \cdot \frac{5!}{3!} = \\ &= 720 + 1200 + 80 = 2000. \end{aligned}$$

II. megoldás: A a) IV. megoldásnál nyert képletet alkalmazva:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}U_5 &= \sum_{k=1}^4 \binom{6}{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \binom{6}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{13-k}{4-k} = \binom{12}{3} + 6 \binom{11}{2} + 36 \binom{10}{1} + 90 \binom{9}{0} = \\ &= 220 + 330 + 360 + 90 = 1000, \end{aligned}$$

és így

$$U_5 = 2 \cdot 1000 = 2000.$$