

a) A számlálót szorzattá alakítva a $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ képlet alapján:

$$\frac{2 \cos \frac{3\alpha + \alpha}{2} \cos \frac{3\alpha - \alpha}{2}}{2 \cos^3 \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha} = \frac{2 \cos 2\alpha \cos \alpha}{2 \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)} = \frac{2 \cos 2\alpha \cos \alpha}{2 \cos \alpha \cos 2\alpha} = 1.$$

b) Ismeretes, hogy $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$, azért fordítva

$\cos(\alpha + \beta) \cos \alpha + \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha = \cos[(\alpha + \beta) - \alpha] = \cos \beta$, és így kifejezésünk

$$\frac{\cos \beta}{\cos \beta} = 1.$$

c)

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sin \alpha = \\ &= 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha = \\ &= 2 \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha. \\ \cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha = \\ &= \cos^3 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha - 2(1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha = \\ &= \cos^3 \alpha - \cos \alpha + \cos^3 \alpha - 2 \cos \alpha + 2 \cos^3 \alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha. \end{aligned}$$

Az így nyert értékeket kifejezésünkbe helyettesítve

$$\frac{3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha + 4 \sin^3 \alpha}{4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha - 4 \cos^3 \alpha} + \operatorname{tg} \alpha = \frac{3 \sin \alpha}{-3 \cos \alpha} + \operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

Rozsondai Béla (Sopron, Széchenyi g. III. o. t.)