

Jelöljük a négyszög csúcspontjait az a és d oldal közös A pontjából kiindulva A, B, C, D -vel. Ismeretes, hogy a húrnégyszögben a szemben fekvő szögek összege 180° , tehát a $C \sphericalangle = 180 - \alpha$. Mivel $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$, azért $\cos \alpha$ -t kell az oldalakkal kifejezni.

Az ABD_Δ és CBD_Δ háromszögekből a közös BD oldalt cosinus tétellel kifejezve, egyrészt

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha,$$

másrészt

$$BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(180 - \alpha) = b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha.$$

A baloldalak egyenlőségéből következik a jobboldalak egyenlősége:

$$b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha = a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha,$$

vagyis

$$(2bc + 2ad) \cos \alpha = a^2 + d^2 - b^2 - c^2,$$

amiből

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2ad + 2bc}.$$

Ebből következik, hogy

$$1 - \cos \alpha = \frac{2ad + 2bc - a^2 - d^2 + b^2 + c^2}{2ad + 2bc} = \frac{(b + c)^2 - (a - d)^2}{2ad + 2bc},$$

ill.

$$1 + \cos \alpha = \frac{2ad + 2bc + a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2ad + 2bc} = \frac{(a + d)^2 - (b - c)^2}{2ad + 2bc}$$

Tehát

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{(b + c)^2 - (a - d)^2}{(a + d)^2 - (b - c)^2} = \frac{(b + c + a - d)(b + c - a + d)}{(a + d + b - c)(a + d - b + c)} = \\ &= \frac{(2s - 2d)(2s - 2a)}{(2s - 2c)(2s - 2b)} = \frac{(s - a)(s - d)}{(s - b)(s - c)}. \end{aligned}$$

Szabó Dániel (Esztergom, I. István g. III. o. t.)