

I. megoldás: A baloldali szorzat mindkét tényezője valós és pozitív (mert $3\sqrt{3} > 5$), azért elég kimutatni, hogy a baloldal 6-ik hatványa 1.

$$\begin{aligned}(2 + \sqrt{3})^3 \left[\frac{\sqrt{2}(3\sqrt{3} - 5)}{2} \right]^2 &= (8 + 12\sqrt{3} + 18 + 3\sqrt{3}) \frac{2(27 - 30\sqrt{3} + 25)}{4} = \\ &= (26 + 15\sqrt{3})(26 - 15\sqrt{3}) = 676 - 225 \cdot 3 = 1.\end{aligned}$$

Gyapjas Ferenc (Bp. VIII., Széchenyi g. III. o. t).

Megoldotta: Gutay L.

A fenti két megoldó kivételével az összes többi megoldó nem mutatott rá a baloldal pozitív voltára, hanem csak azt bizonyította, hogy a baloldal 6-ik hatványa 1, amitől a baloldalon még -1 , vagy komplex szám ($\sqrt[6]{1}$ -nek 4 komplex értéke van) is állhatna.

II. megoldás: Szorzatunk első tényezője így alakítható át:

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}.$$

A második tényező pedig így is írható:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}(3\sqrt{3} - 5)}{2}} &= \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{2}(6\sqrt{3} - 10)}{8}} = \sqrt[3]{\frac{6\sqrt{3} - 10}{2\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3} - 9 + 3\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}} = \\ &= \sqrt[3]{\frac{(\sqrt{3} - 1)^3}{(\sqrt{2})^3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Tehát a két tényező szorzata:

$$\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} = \frac{3 - 1}{2} = 1.$$