

I. megoldás: A tételt teljes indukcióval bizonyítjuk.

Ha $n = 1$, a tétel igaz, mert így szól $\sin \varphi = \frac{\sin^2 \varphi}{\sin \varphi}$.

Feltéve, hogy igaz $n = k$ -ra, bebizonyítjuk, hogy igaz $n = k + 1$ -re is.

Ha n értéke k -ról $k + 1$ -re nő, az (1) kifejezés baloldalán egy taggal lesz több, ez a tag: $\sin(2k + 1)\varphi$. A jobboldal pedig $\frac{\sin^2 k\varphi}{\sin \varphi}$ -ről $\frac{\sin^2(k + 1)\varphi}{\sin \varphi}$ -re változik. Bizonyítandó tehát, hogy

$$(2) \quad \sin(2k + 1)\varphi = \frac{\sin^2(k + 1)\varphi}{\sin \varphi} - \frac{\sin^2 k\varphi}{\sin \varphi}$$

Alkalmazzuk a következő jelölést $(k + 1)\varphi = \alpha$, $k\varphi = \beta$.

Ezután (2) ilyen alakú lesz:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$$

Ez pedig azonosság, ami rövid számítással kiderül, ha $\sin(\alpha + \beta)$ -t és $\sin(\alpha - \beta)$ -t az ismert módon kifejezzük α és β szögfüggvényeivel. Ugyanis

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) &= \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta = \\ &= \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) - (1 - \sin^2 \alpha) \sin^2 \beta = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta. \end{aligned}$$

II. megoldás: Szorozzuk mindkét oldalt $2 \sin \varphi$ -vel, a baloldal lesz:

$$2 \sin \varphi \sin \varphi + 2 \sin \varphi \sin 3\varphi + 2 \sin \varphi \sin 5\varphi + \dots + \\ + 2 \sin \varphi \sin(2n - 1)\varphi.$$

Az ismert $\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$ képlet alapján ez a kifejezés így írható:

$$\begin{aligned} &[\cos 0 - \cos 2\varphi] + [\cos 2\varphi - \cos 4\varphi] + \dots + \\ &+ [\cos(2n - 2)\varphi - \cos 2n\varphi] = \cos 0 - \cos 2n\varphi = \\ &= 2 \sin n\varphi \sin n\varphi = 2 \sin^2 n\varphi. \end{aligned}$$

Ezt kellett bizonyítani.

Kántor Sándor (Debrecen, Ref. Koll. gimn. III. o. t.)