

Először bizonyítjuk a b) állítást.

A cosinus-tételt alkalmazva az AFC és BCF háromszögekre,
(ahol F a szögfelező és az a oldal metszéspontja)

$$\begin{aligned}u^2 &= f_a^2 + c^2 - 2cf_a \cos \frac{\alpha}{2}, \\v^2 &= f_a^2 + b^2 - 2bf_a \cos \frac{\alpha}{2}.\end{aligned}$$

Innen:

$$\begin{aligned}\cos \frac{\alpha}{2} &= \frac{f_a^2 + c^2 - u^2}{2cf_a} = \frac{f_a^2 + b^2 - v^2}{2bf_a}, \\(f_a^2 + c^2 - u^2)b &= (f_a^2 + b^2 - v^2)c, \\f_a^2(b - c) &= b^2c - bc^2 + bu^2 - cv^2 = bc(b - c) + bu^2 - cv^2,\end{aligned}$$

amiből

$$f_a^2 = bc - \frac{cv^2 - bu^2}{b - c} = bc - uv \frac{c \frac{v}{b} - b \cdot \frac{u}{v}}{b - c}.$$

A szögfelező a szöggel szemben fekvő oldalt a szöget bezáró oldalak arányában osztja, vagyis: $\frac{u}{v} = \frac{c}{b}$.
Ezt felhasználva:

$$f_a^2 = bc - uv \frac{c \frac{v}{b} - b \cdot \frac{c}{b}}{b - c} = bc - uv.$$

a) f_a hosszának kiszámításához kifejezzük u és v értékét a háromszög oldalával:

$$\frac{u}{v} = \frac{c}{b} \quad \text{és} \quad u + v = a,$$

$$\text{amiből } v = a - u \quad \text{és} \quad \frac{u}{a - u} = \frac{c}{b}, \quad ub = ca - cu,$$

és így $u = \frac{ac}{b + c}$; hasonlóképpen $v = \frac{ab}{b + c}$.
 u és v kapott értékeit f_a kifejezésébe behelyettesítve:

$$\begin{aligned}f_a^2 &= bc - \frac{a^2bc}{(b + c)^2} = \frac{bc[(b + c)^2 - a^2]}{(b + c)^2} = \\&= \frac{bc(b + c + a)(b + c - a)}{(b + c)^2}.\end{aligned}$$

A szokásos jelöléssel $a + b + c = 2s$, valamint $-a + b + c = 2(s - a)$, és így

$$f_a = \frac{2\sqrt{bcs(s - a)}}{b + c}.$$

Hasonlóképpen

$$f_b = \frac{2\sqrt{acs(s - b)}}{a + c} \quad \text{és} \quad f_c = \frac{2\sqrt{abs(s - c)}}{a + b}$$

Kántor Sándor (Debrecen, Ref. koll. III. o. t.)