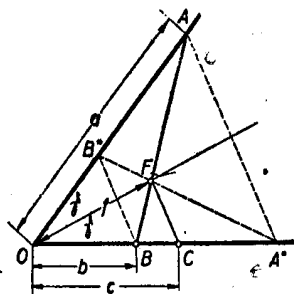


I. megoldás: A feladat megoldásával egyenlő értékű annak bebizonyítása, hogy az $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ kifejezés értéke független a szelő irányától.



Tükrözzük a szelőt a szögfelezőre (A^*, B^*) és rajzoljunk F -en át OF -re merőleges egyenest, ez a BFA^* szög szögfelezője lesz és metszi a szög OB szárát a C pontban, OC távolságot jelöljük c -vel, $OA^* = a$ -val a tükrözés miatt.

Alkalmazzuk BFA^* háromszögre a szögfelező ismeretes tételét (– a szögfelező a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja –)

$$CB : CA^* = BF : A^*F,$$

azaz

$$(c - b) : (a - c) = BF : A^*F.$$

Hasonló tétel érvényes a háromszög OF külső szögfelezőjére

$$OB : OA^* = BF : A^*F, \quad \text{azaz} \quad b : a = BF : A^*F.$$

E két aránypár összehasonlításával a

$$\frac{c - b}{a - c} = \frac{b}{a},$$

ebből némi átrendezéssel az

$$ac + bc = 2ab$$

egyenlethez jutunk, melyet abc -vel végigosztva,

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{2}{c},$$

tehát független a szelő irányától.

II. megoldás. Trigonometriai úton is kimutathatjuk, hogy $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ nem függ a szelő irányától. Fejezzük ki az OAB_{Δ} területét OAF_{Δ} és OFB_{Δ} háromszögek területének összegeként (jelöljük OF -et f -fel)

$$\frac{af \sin \gamma}{2} + \frac{bf \sin \gamma}{2} = \frac{ab \sin 2\gamma}{2}$$

De $\sin 2\gamma = 2 \sin \gamma \cos \gamma$, melyet behelyettesítve, egyszerűsítés és $abf \sin \gamma$ -val való végigosztás után az

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{2 \cos \gamma}{f}$$

egyenlethez jutunk, ebből már kiolvashatjuk, hogy $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ független a szelő irányától, mert sem f , sem γ nem függ tőle.

Deeső Zoltán (Bp., I. László g. II. o. t.)