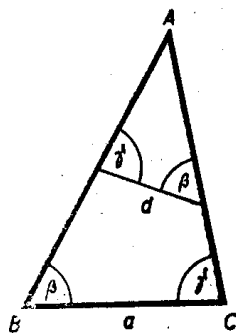
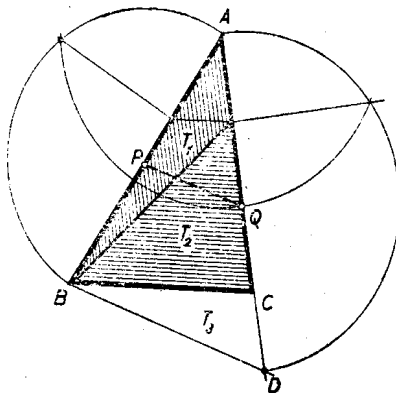


A kívánt tulajdonságú hűrnégyszögek közül próbáljuk azt megszerkeszteni, melynek egyik oldala a , ennek a -val szembenfekvő oldala d , az AB oldal A melletti szakaszával γ szöget (következésképpen az AC oldal megfelelő szakaszával β szöget) zár be. Rajzoljunk egy ilyen egyenest és szerkesszük meg a vele párhuzamos egyenesek közül azt, amelyik a háromszög területét a kívánt $1 : 2$ arányban osztja.



Tekintsük a B csúsból kiinduló és a b oldalt $1 : 2$ arányban osztó egyenest, ez a területet is $1 : 2$ arányban osztja és ismeretes miként lehet ezt az arányos osztást a -val párhuzamos egyenessel is végrehajtani.¹ Erre a szerkesztésre vezethetjük vissza a feladat megoldását, ha B -n át d -vel párhuzamost húzunk, AC -t meghosszabbítjuk és az ABC_{Δ} -höz hozzácsatoljuk az így nyert T_3 háromszöget, melynek harmadik csúcsát jelöljük D -vel.



Ugyanis az ABD_{Δ} -et BD -vel párhuzamos egyenessel $T_1 : (T_2 + T_3)$ arányban osztva, az a PQ egyenes (eredményvonalal jelöltük) ABC_{Δ} -et is a kívánt arányban osztja.

Figyelembe véve, hogy $APQ_{\Delta} \sim ACB_{\Delta}$ (mert a szögeik egyenlők) megfelelő oldalaik négyzete úgy aránylik egymáshoz, mint területeik. Tehát pl. $AQ^2 : AB^2 = 1 : 3$, következésképpen

$$AQ = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \sqrt{AB \cdot \frac{AB}{3}},$$

eszerint AQ -t úgy is megszerkeszthetjük, hogy az AB fölé rajzolt Thales-kört az AB -re annak egyharmadában emelt merőlegessel elmetsszük.

Az a oldalból kiindulva, ahogy tettük, megoldást csak akkor kapunk, ha $AQ = \frac{c}{\sqrt{3}} < b$ és $AP = \frac{b}{\sqrt{3}} < c$.

Ezek közül az egyik mindig fennáll, pl. ha $c > b$ akkor $\frac{b}{\sqrt{3}} < c$. Általában ha $c > b > a$, akkor nem állhat fenn

egyidejűleg, hogy $c \geq b\sqrt{3}$ és $b \geq a\sqrt{3}$, mert e két egyenlőtlenség szerint $c > 3a$, azaz $\frac{c}{3} \geq a$ és $\frac{c}{\sqrt{3}} \geq b$; ezekből

összeadással nyerjük, hogy $c \frac{1 + \sqrt{3}}{3} \geq a + b$ ami ellentmondás, mert $\frac{1 + \sqrt{3}}{3} < 1$ és így $c > a + b$ lenne.

Ha pedig az ellentmondásra vezető egyenlőtlenségek egyike helyett fennáll pl. $b < a\sqrt{3}$, akkor a $c > b > a$ feltétel szerint $a < b\sqrt{3}$ is fennáll és a két egyenlőtlenség értelmében a c oldal fölé lehet megszerkeszteni a kívánt hűrnégyszöget.

¹L. a gimn. II. o. Matematika tankönyv 72–74. oldalán.