

Írjuk fel a szomszédos tagok különbségeinek sorozatát, az  $u$ . n. differenciasorozatot:

$$8, 6, 16, 10, 24, 14, 32, 18, 40, \dots$$

A differenciasorozat páratlan sorszámú tagjai a 8, 16, 24, ... számtani sorozatot, a páros sorszámúak a 6, 10, 14, ... számtani sorozatot alkotják. (1) tagjai tehát ilyen alakban állíthatók elő:

$$a_n = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 8 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 8 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 8 + \dots$$

Ha  $n$  páratlan, azaz  $2k + 1$  alakú,

$$a_{2k+1} = 2[(1 + 3 + \dots + (2k + 1))] + 8(1 + 2 + 3 + \dots + k).$$

A számtani sorokat összegezve:

$$a_{2k+1} = 2(k + 1)^2 + 8 \cdot \frac{k^2 + k}{2} = 6k^2 + 8k + 2.$$

Páratlan  $n$ -ekre tehát, mivel  $n = 2k + 1$ ,  $k$  helyébe  $\frac{n-1}{2}$ -t téve,

$$(2) \quad \begin{aligned} a_n &= 6\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + 8\frac{n-1}{2} + 2, \\ \text{vagyis} \quad a_n &= \frac{3}{2}n^2 + n - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Páros  $n$ -ekre, azaz ha  $n = 2k$ ,

$$a_{2k} = 2[(1 + 3 + \dots + (2k - 1))] + 8(1 + 2 + \dots + k).$$

Az előbbi megfontolás alapján

$$a_{2k} = 2k^2 + 8\frac{k^2 + k}{2} = 6k^2 + 4k.$$

Itt  $n = 2k$  miatt  $k$  helyébe  $\frac{n}{2}$ -t kell írunk, s így páros  $n$ -ekre:

$$a_n = 6\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{n}{2},$$

vagyis

$$(3) \quad a_n = \frac{3}{2}n^2 + 2n.$$

(3) értéke  $n + \frac{1}{2} = \frac{2n+1}{2}$ -vel nagyobb, mint (2)-é. Adjunk (2)-hez  $\frac{2n+1}{4}$ -et. A kapott összegből páratlan  $n$  esetén  $\frac{2n+1}{4}$ -et le kell vonni, páros  $n$  esetén ugyanannyit hozzá kell adni, hogy helyes képletet kapjunk. Ezt a kettősséget egy  $(-1)^n$  szorzótényezővel írhatjuk le.

Így

$$a_n = \frac{3}{2}n^2 + n - \frac{1}{2} + \frac{2n+1}{4} + (-1)^n \frac{2n+1}{4},$$

ami végleges alakban így írható:

$$a_n = 3\frac{n^2 + n}{2} - \frac{1}{4} + (-1)^n \frac{2n+1}{4}.$$