

Azt, hogy

$$(a+b+c)^7 - a^7 - b^7 - c^7$$

osztható $(a+b)$ -vel, a következő átalakításból láthatjuk be:

$$(a+b+c)^7 - a^7 - b^7 - c^7 = (a+b+c)^7 - c^7 - (a^7 + b^7).$$

Itt az első két tag, mint egyenlő kitevőjű hatványok különbsége, mindig osztható az alapok különbségével, ami $c-c=0$ miatt éppen $a+b$. De ezzel $a^7 + b^7$ is osztható, mert egyenlő kitevőjű hatványok összege osztható az alapok összegével, ha a kitevő páratlan, mint esetünkben is. Hasonlóan bizonyíthatjuk a $(b+c)$ -vel és a $(c+a)$ -val való oszthatóságot is. Minthogy az $a+b$, $b+c$ és $c+a$ tényezőknek általában nincs közös osztójuk, abból, hogy $(a+b+c)^7 - a^7 - b^7 - c^7$ külön-külön mindegyikükkel osztható, következik, hogy szorzatukkal is osztható.

Valamivel nehezebb a 7-tel való oszthatóság kimutatása. Ehhez először azt igazoljuk, hogy $n^7 - n$ mindig osztható 7-tel, bármilyen egész számot jelentsen is n . Megint tényezőkre bontásra törekszünk, mint az előző feladatban:

$$n^7 - n = n(n^6 - 1) = n(n^3 - 1)(n^3 + 1).$$

Ismeretes továbbá (és beszorzással is igazolható), hogy

$$\begin{aligned} n^3 - 1 &= (n-1)(n^2 + n + 1), \\ (n^3 + 1) &= (n+1)(n^2 - n + 1). \end{aligned}$$

A jobboldali szorzatok háromtagú tényezőit így alakíthatjuk:

$$\begin{aligned} n^2 + n + 1 &= n^2 + n - 6 + 7 = n^2 + 3n - 2n - 6 + 7 = \\ &= n(n+3) - 2(n+3) + 7 = (n+3)(n-2) + 7 \end{aligned}$$

és hasonlóan

$$n^2 - n + 1 = (n-3)(n+2) + 7.$$

Ezeket felhasználva:

$$\begin{aligned} n^7 - n &= n(n-1)[(n+3)(n-2) + 7](n+1)[(n-3)(n+2) + 7] = \\ &= (n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3) + \\ &\quad + 7(n-2)(n-1)n(n+1)(n+3) + \\ &\quad + 7(n-3)(n-1)n(n+1)(n+2) + 49(n-1)n(n+1) \end{aligned}$$

Az utolsó 3 tagban szemmel látható a 7-tel való oszthatóság, az első tag viszont 7 egymás után következő egész szám szorzata: e tényezők egyike biztosan 7 többszöröse, ennél fogva az egész szorzat is.

Ezekután eredeti számunkról úgy láthatjuk, be hogy osztható 7-tel, ha a következőképpen alakítjuk át:

$$\begin{aligned} (a+b+c)^7 - a^7 - b^7 - c^7 &= \underbrace{(a+b+c)^7 - (a+b+c)}_{=0} - \\ &\quad - \underbrace{(a^7 - a)}_{=0} - \underbrace{(b^7 - b)}_{=0} - \underbrace{(c^7 - c)}_{=0} \end{aligned}$$

A kapcsokkal együvé foglalt két-két tag különbsége az előbbiek szerint osztható 7-tel, így összegük ill. különbségük is. De ha az eredeti szám osztható $(a+b)(b+c)(c+a)$ -val is és 7-tel is külön-külön, akkor ezek szorzatával is osztható, mivel általában nincs közös osztójuk. Éppen ezt kellett bebizonyítanunk.