

Azt kell bizonyítanunk, hogy $a^{2^n+1} - a$ osztható 2-vel és 5-tel, ha n 2-nél nem kisebb egész szám.

$$a^{2^n+1} - a = a \left(a^{2^n} - 1 \right),$$

$$2^n = 2^{2+(n-2)} = 2^2 \cdot 2^{n-2},$$

ahol

$$n - 2 \geq 0,$$

és így

$$a \left(a^{2^n} - 1 \right) = a \left(a^{2^2 \cdot 2^{n-2}} - 1 \right) = a \left[\left(a^{2^2} \right)^{2^{n-2}} - 1 \right] =$$

$$= a \left[\left(a^4 \right)^{2^{n-2}} - 1 \right].$$

A szögletes zárójelben álló kifejezés egyenlő kitevőjű hatványok különbségének is tekinthető, hiszen $1 = 1^{2^{n-2}}$, ez a különbség pedig mindig osztható az alapok különbségével, esetünkben $(a^4 - 1)$ -gyel, ennél fogva eredeti számunk $a(a^4 - 1)$ -gyel.

Ha kimutatjuk, hogy már ez utóbbi szorzatunk: $a(a^4 - 1)$ is osztható 2-vel és 5-tel, akkor nyilván eredeti számunk is osztható ezekkel, azaz csakugyan 0-ra végződik.

Ámde

$$a^4 - 1 = (a^2 - 1)(a^2 + 1) = (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1),$$

és

$$a^2 + 1 = a^2 - 4 + 5 = (a - 2)(a + 2) + 5,$$

tehát

$$a(a^4 - 1) = a(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1) = a(a - 1)(a + 1)[(a - 2)(a + 2) + 5] =$$

$$= (a - 2)(a - 1)a(a + 1)(a + 2) + 5(a - 1)a(a + 1).$$

Sikerült tehát $a(a^4 - 1)$ szorzatunkat két többtényezős szorzat összegére bontanunk; ezeken könnyebben vizsgálhatjuk az oszthatóságot. Az első szorzat öt egymás után következő szám szorzata: ennek tényezői között biztosan találunk 2-vel oszthatót és legalább egy 5-tel oszthatót is. A második szorzat szemmel láthatóan 5 többszöröse, de az utána álló 3 egymást követő szám közül is legalább az egyik páros. Ezzel igazoltuk állításunkat.

Megjegyzés: Azt, hogy az $a(a^4 - 1)$ szorzat 2-vel is és 5-tel is osztható, másképpen is bizonyíthatjuk. Már láttuk, hogy

$$a(a^4 - 1) = (a - 1)a(a + 1)(a^2 + 1)$$

A 2-vel való oszthatóság egy pillanatig sem kétséges, hiszen pl. már $a(a + 1)$ biztosan páros. Ha $a = 5k + 1$, $5k$ ill. $5k - 1$ alakú, akkor rendre az első, második ill. harmadik tényezője osztható 5-tel a jobboldali szorzatnak. Ha pedig $a = 5k \pm 2$, akkor

$$a^2 + 1 = 25k^2 \pm 20k + 4 + 1 = 5K$$

Grätzer György (Bp., Berzsenyi g. II. o. t.)