

A kéttagú szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenség két oldalának különbségét képezve

$$\begin{aligned} & \frac{\overset{a}{\log}(1+a^{x_1}) + \overset{a}{\log}(1+a^{x_2})}{2} - \overset{a}{\log} \left(1 + a^{\frac{x_1+x_2}{2}} \right) = \\ & = \frac{1}{2} \overset{a}{\log} \frac{1+a^{x_1}+a^{x_2}+a^{x_1+x_2}}{1+2a^{\frac{x_1+x_2}{2}}+a^{x_1+x_2}} > 0, \end{aligned}$$

$$\text{ha } x_1 \neq x_2 \text{ és } a > 1, \text{ mert } a^{x_1} + a^{x_2} > 2\sqrt{a^{x_1}a^{x_2}} = 2a^{\frac{x_1+x_2}{2}},$$

tehát $\overset{a}{\log}(1+a^x)$ konvex.

Másrészt

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{1+x_1^2} + \sqrt{1+x_2^2}}{2} - \sqrt{1 + \left(\frac{x_1+x_2}{2} \right)^2} = \\ & = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sqrt{1+x_1^2} + \sqrt{1+x_2^2})^2 - 4 \left[1 + \left(\frac{x_1+x_2}{2} \right)^2 \right]}{\sqrt{1+x_1^2} + \sqrt{1+x_2^2} + 2\sqrt{1 + \left(\frac{x_1+x_2}{2} \right)^2}}. \end{aligned}$$

Itt a számláló

$$\begin{aligned} & 2 + x_1^2 + x_2^2 + 2\sqrt{(1+x_1^2)(1+x_2^2)} - 4 - (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) = \\ & = 2 \left[\sqrt{1+x_1^2+x_2^2+(x_1x_2)^2} - (1+x_1x_2) \right] > \\ & > 2 \left[\sqrt{1+2x_1x_2+(x_1x_2)^2} - (1+x_1x_2) \right] = 0, \end{aligned}$$

ha x_1 és x_2 különböző számok. Így $\sqrt{1+x^2}$ is konvex.

Írjuk fel a két függvényre a k tagú szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenséget (melynek helyessége következik a kéttagú egyenlőtlenség teljesüléséből).

$$\frac{\overset{a}{\log}(1+a^{x_1}) + \overset{a}{\log}(1+a^{x_2}) + \dots + \overset{a}{\log}(1+a^{x_k})}{k} \geq \overset{a}{\log} \left(1 + a^{\frac{x_1+x_2+\dots+x_k}{k}} \right).$$

Legyen $x_1 = \overset{a}{\log} a_1$, $x_2 = \overset{a}{\log} a_2$, $\dots$ $x_k = \overset{a}{\log} a_k$, és keressük azokat a számokat, melyek logaritmusai állnak a két oldalon. Ekkor kapjuk a

$$\sqrt[k]{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_k)} \geq 1 + \sqrt[k]{a_1a_2\dots a_k}$$

egyenlőtlenséget. Egyenlőség csak az $a_1 = a_2 = \dots = a_k$ esetben következik be

Az $\sqrt{1+x^2}$ függvényre vonatkozóan

$$\frac{\sqrt{1+x_1^2} + \sqrt{1+x_2^2} + \dots + \sqrt{1+x_k^2}}{k} \geq \sqrt{1 + \left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_k}{k} \right)^2},$$

vagy k -val átszorozva és a két oldalt felcserélve és $x_1, x_2, \dots, x_k$ helyett $a_1, a_2, \dots, a_k$ -t téve:

$$\sqrt{k^2 + (a_1 + a_2 + \dots + a_k)^2} \leq \sqrt{1+a_1^2} + \sqrt{1+a_2^2} + \dots + \sqrt{1+a_k^2}.$$